

1

次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 10y + 8 \qquad (2) \quad a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$

2

次の不等式を解け。

$$(1) \quad |x-4| > 3 \qquad (2) \quad |x-5| \leq \frac{2}{3}|x| + 1$$

3

実数全体を全体集合とする。 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid k-6 \leq x \leq k\}$ (k は定数) とするとき, $A \subset B$ となる k の値の範囲を求めよ。

4

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて, $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数であることを証明せよ。

5

WASEDA の 6 文字を 1 列に並べるとき, 次の確率を求めよ。

- (1) 母音と子音が交互に並ぶ確率 (2) A が隣り合っていない確率
(3) 6 文字を円形に並べるとき, 母音と子音が交互に並ぶ確率

6

動点 P が正五角形 ABCDE の頂点 A から出発して正五角形の周上を動くものとする。
P がある頂点にいるとき, 1 秒後にはその頂点に隣接する 2 頂点のどちらかにそれぞれ
確率 $\frac{1}{2}$ で移っているものとする。

- (1) P が A から出発して 3 秒後に E にいる確率を求めよ。
(2) P が A から出発して 9 秒後に A にいる確率を求めよ。

7

箱 A には白玉 3 個と赤玉 5 個, 箱 B には白玉 2 個と赤玉 1 個と青玉 3 個が入っている。
まず, 任意に 1 つの箱を選び, 次にその箱の中から玉を 1 個取り出すものとする。取り
出された玉の色が白であったとき, それが箱 B から取り出された確率を求めよ。

8

面積が 1 に等しい $\triangle ABC$ において, 辺 BC, CA, AB を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ
L, M, N とし, 線分 AL と BM, BM と CN, CN と AL の交点をそれぞれ P, Q, R
とするとき

(1) $AP : PR : RL = \boxed{} : \boxed{} : 1$ である。

(2) $\triangle PQR$ の面積は $\boxed{}$ である。

9

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) のとき, $\sin \theta \cos \theta$, $\sin \theta - \cos \theta$,

$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$, $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$, $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta$ の値をそれぞれ求めよ。

10

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, 次の不等式を満たす θ の範囲を求めよ。

(1) $\sqrt{2} \sin \theta - 1 \leq 0$ (2) $2 \cos \theta + 1 > 0$ (3) $\tan \theta > -1$

11

$\triangle ABC$ において, $AB=7$, $BC=5$, $CA=6$ のとき, 外接円の半径 R , 内接円の半径
 r を, それぞれ求めよ。

12

△ABCの頂角A内の傍心を I_a とする。次のことを証明せよ。

$$(1) \quad \angle AI_a B = \frac{1}{2} \angle C \qquad (2) \quad \angle BI_a C = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$

13

さいころを振る操作を繰り返し、1の目が3回出たらこの操作を終了する。3以上の自然数 n に対し、 n 回目にこの操作が終了する確率を p_n とすると、 p_n の値が最大となる n の値を求めよ。

14

次の□に最も適する語句を(ア)～(エ)から選べ。 x, y は実数とする。

(1) $x < 1$ は $x \leq 1$ であるための□。

(2) $x < y$ は $x^4 < y^4$ であるための□。

(3) $xy + 1 = x + y$ は x, y のうち少なくとも1つは1であるための□。

(4) $\angle A < 90^\circ$ は、△ABCが鋭角三角形であるための□。

(ア) 必要十分条件である

(イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない (エ) 必要条件でも十分条件でもない

15

対偶を考えることにより、次の命題を証明せよ。

「整数 a, b について、積 ab が3の倍数ならば、 a または b は3の倍数である。」

1

【解答】 (1) $(x+y+4)(x-3y+2)$ (2) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

2

【解答】 (1) $x < 1, 7 < x$ (2) $\frac{12}{5} \leq x \leq 18$

3

【解答】 $3 \leq k \leq 4$

4

【解答】 略

5

【解答】 (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{10}$

6

【解答】 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{9}{64}$

7

【解答】 $\frac{8}{17}$

8

【解答】 (1) (ア) 3 (イ) 3 (2) (ウ) $\frac{1}{7}$

9

【解答】 順に $-\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{11}{6}, \frac{23}{32}, \frac{\sqrt{7}}{4}$

10

【解答】 (1) $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ, 135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ (2) $0^\circ \leq \theta < 120^\circ$
(3) $0^\circ \leq \theta < 90^\circ, 135^\circ < \theta \leq 180^\circ$

11

【解答】 $R = \frac{35\sqrt{6}}{24}, r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

12

【解答】 (1) 略 (2) 略

13

【解答】 $n = 12, 13$

14

【解答】 (1) (ウ) (2) (エ) (3) (ア) (4) (イ)

15

【解答】 略

1

【解説】

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 10y + 8 \\ &= x^2 - (2y-6)x - (3y^2 + 10y - 8) \\ &= x^2 - (2y-6)x - (y+4)(3y-2) \\ &= \{x + (y+4)\}\{x - (3y-2)\} \\ &= (x+y+4)(x-3y+2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad \quad y+4 \longrightarrow \quad y+4 \\ 1 \quad \times \quad -(3y-2) \longrightarrow -3y+2 \\ \hline 1 \quad \quad -(y+4)(3y-2) \quad -2y+6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (\text{与式}) = (b-c)^3 a + b(c^3 - 3c^2 a + 3c a^2 - a^3) + c(a^3 - 3a^2 b + 3a b^2 - b^3) \\ &= -(b-c)a^3 + \{(b-c)^3 + 3bc(b-c)\}a - bc(b^2 - c^2) \\ &= -(b-c)a^3 + (b-c)\{(b-c)^2 + 3bc\}a - bc(b+c)(b-c) \\ &= -(b-c)a^3 + (b-c)(b^2 + bc + c^2)a - bc(b+c)(b-c) \\ &= -(b-c)\{a^3 - (b^2 + bc + c^2)a + bc(b+c)\} \\ &= -(b-c)\{(c-a)b^2 + (c^2 - ca)b + a(a^2 - c^2)\} \\ &= -(b-c)\{(c-a)b^2 + c(c-a)b - a(c+a)(c-a)\} \\ &= -(b-c)(c-a)\{b^2 + cb - a(c+a)\} \\ &= -(b-c)(c-a)\{c(b-a) + b^2 - a^2\} \\ &= -(b-c)(c-a)(b-a)\{c + (b+a)\} \end{aligned}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

2

解説

(1) $|x-4|>3$ から $x-4<-3, 3<x-4$
したがって $x<1, 7<x$

(2) $|x-5|\leq \frac{2}{3}|x|+1$ から $3|x-5|\leq 2|x|+3$

[1] $x<0$ のとき, 不等式は $-3(x-5)\leq -2x+3$
ゆえに $-x\leq -12$ よって $x\geq 12$
これは $x<0$ を満たさない。

[2] $0\leq x<5$ のとき, 不等式は $-3(x-5)\leq 2x+3$
ゆえに $-5x\leq -12$ よって $x\geq \frac{12}{5}$

$0\leq x<5$ との共通範囲は $\frac{12}{5}\leq x<5$ ①

[3] $5\leq x$ のとき, 不等式は $3(x-5)\leq 2x+3$
これを解いて $x\leq 18$
 $5\leq x$ との共通範囲は $5\leq x\leq 18$ ②

求める解は, ① と ② を合わせた範囲で

$$\frac{12}{5}\leq x\leq 18$$

3

解説

$A\subset B$ となるための条件は

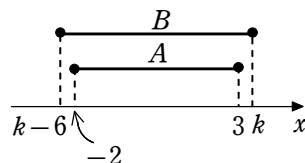
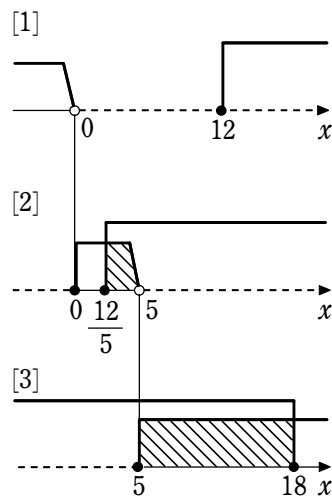
$$k-6\leq -2 \quad \text{..... ①}$$

$$3\leq k \quad \text{..... ②}$$

が同時に成り立つことである。

① から $k\leq 4$

これと ② の共通範囲を求めて $3\leq k\leq 4$



4

解説

$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数でないと仮定すると, r を有理数として, $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = r$ とおける。

両辺を2乗すると $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} = r^2$ よって $\sqrt{3} = 3r^2 - 2$ ①

ここで, r は有理数であるから, $3r^2 - 2$ も有理数である。

ゆえに, ① は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって, $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ は無理数である。

5

解説

2個のAを A_1, A_2 とし, これらを母音とみなす。

W, A_1 , S, E, D, A_2 の6文字を1列に並べる方法は ${}_6P_6$ 通り

(1) 母音と子音が交互に並ぶのは, 次の[1], [2]の場合がある。

[1] 母子母子母子 [2] 子母子母子母

[1]の場合

母音の並べ方は ${}_3P_3$ 通り

そのおののについて, 子音の並べ方は ${}_3P_3$ 通り

よって ${}_3P_3 \times {}_3P_3$ 通り

[2]の場合

[1]と同様に考えて ${}_3P_3 \times {}_3P_3$ 通り

よって, 求める確率は $\frac{2 \times {}_3P_3 \times {}_3P_3}{{}_6P_6} = \frac{2 \times 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$

(2) まず, A_1 と A_2 が隣り合う場合について考える。

A_1 と A_2 の2文字を1文字とみなし, この1文字と残り4文字の並べ方は

${}_5P_5$ 通り

次に, A_1 と A_2 の並べ方が 2通り

よって、 A_1 と A_2 が隣り合う場合は ${}_5P_5 \times 2$ 通り

ゆえに、この2文字が隣り合っていない確率は

$$\frac{{}_6P_6 - {}_5P_5 \times 2}{{}_6P_6} = \frac{6! - 2 \cdot 5!}{6!} = \frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}$$

〔別解〕 A_1 と A_2 が隣り合っていない場合を考える。

W, S, E, D の4文字を1列に並べる方法は ${}_4P_4$ 通り

この4文字の間または両端の5か所に A_1 と A_2 を入れる方法は ${}_5P_2$ 通り

したがって、 A_1 と A_2 が隣り合っていない場合は ${}_4P_4 \times {}_5P_2$ 通り

よって、求める確率は $\frac{{}_4P_4 \times {}_5P_2}{{}_6P_6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 5} = \frac{2}{3}$

(3) W, A_1 , S, E, D, A_2 を円形に並べる方法は、全部で $(6-1)! = 5!$ (通り)

W を固定すると、残りの子音の並べ方は ${}_2P_2$ 通り

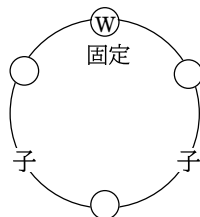
子音と子音の間の3か所に母音3個を並べる方法は

${}_3P_3$ 通り

よって、母音と子音が交互に並ぶ方法は

${}_2P_2 \times {}_3P_3$ 通り

したがって、求める確率は $\frac{{}_2P_2 \times {}_3P_3}{5!} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$

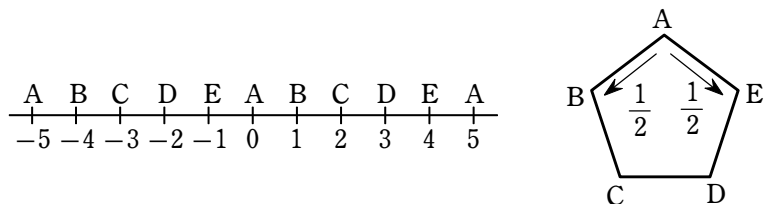


6

〔解説〕

下の図のように、正五角形の頂点を数直線上の点に対応させる。

また、動点 P が正五角形の周上を反時計回りに移動することを数直線上の正の方向の移動、時計回りに移動することを数直線上の負の方向の移動と考える。



ゆえに、 n 回の移動のうち、反時計回りに k 回、時計回りに $n-k$ 回動いたときの P の位置を、数直線上の座標で表すと

$$k - (n - k) = 2k - n \quad (n, k \text{ は整数}, 0 \leq k \leq n)$$

(1) P が3秒後に E にいるとき、数直線上での座標は -1 と考えられる。

$$2k - 3 = -1 \text{ とすると } k = 1$$

よって、P が3秒後に E にいるのは、反時計回りに1回、時計回りに2回動いた場合である。

$$\text{したがって、求める確率は } {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

(2) P が9秒後に A にいるとき、数直線上での座標は -5 または 0 または 5 と考えられる。

$$2k - 9 = -5 \text{ とすると } k = 2, \quad 2k - 9 = 0 \text{ とすると } k = \frac{9}{2}$$

$$2k - 9 = 5 \text{ とすると } k = 7$$

$0 \leq k \leq 9$ を満たす整数であるものは $k = 2, 7$

よって、P が9秒後に A にいるのは、反時計回りに2回、時計回りに7回動くか、反時計回りに7回、時計回りに2回動いた場合である。

$$\text{したがって、求める確率は } {}_9C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + {}_9C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{36 + 36}{2^9} = \frac{9}{64}$$

7

〔解説〕

箱 A を選ぶ、箱 B を選ぶ、白玉を取り出すという事象を、それぞれ A, B, W とする。

このとき、 A と B は互いに排反である。

また、白玉を取り出す確率は

$$\begin{aligned} P(W) &= P(A \cap W) + P(B \cap W) = P(A)P_A(W) + P(B)P_B(W) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{17}{48} \end{aligned}$$

求める確率は、条件付き確率 $P_W(B)$ であるから

$$P_W(B) = \frac{P(B \cap W)}{P(W)} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \div \frac{17}{48} = \frac{8}{17}$$

8

解説

(1) $\triangle ABL$ と CN について、メネラウスの定理により

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BC}{CL} \cdot \frac{LR}{RA} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{LR}{RA} = 1$$

よって $LR : RA = 1 : 6$ ①

また、 $\triangle ACL$ と BM について、メネラウスの定理により

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CB}{BL} \cdot \frac{LP}{PA} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{LP}{PA} = 1$$

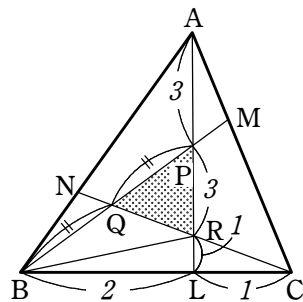
よって $LP : PA = 4 : 3$ ②

①, ② から $AP : PR : RL = 7 : 3 : 1$

(2) (1) と同様にして $BQ : QP : PM = 3 : 3 : 1$

$$\text{よって} \quad \triangle ABL = \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{2}{3}, \quad \triangle PBR = \frac{3}{7} \triangle ABL = \frac{2}{7}$$

$$\text{ゆえに} \quad \triangle PQR = \frac{1}{2} \triangle PBR = \frac{1}{7}$$



9

解説

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{から} \quad 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって} \quad \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \quad \text{..... ①}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ では $\sin \theta > 0$ であるから、① より $\cos \theta < 0$

$$\text{よって} \quad \sin \theta - \cos \theta > 0 \quad \text{..... ②}$$

$$\text{① から} \quad (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}$$

$$\text{② から} \quad \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{また} \quad \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8}\right) \right\} \div \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{11}{6}$$

次に、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^4 \theta + 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{23}{32}$$

$$\text{更に} \quad \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$= 1 \cdot (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

10

解説

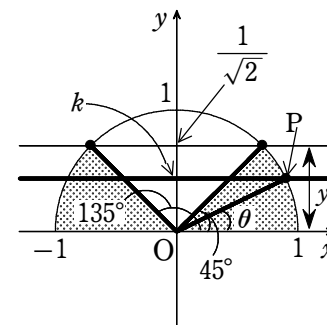
$$(1) \text{ 不等式は} \quad \sin \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ を解くと}$$

$$\theta = 45^\circ, 135^\circ$$

よって、右の図から、求める θ の範囲は

$$0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ, 135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

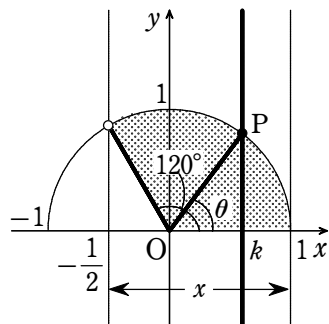


(2) 不等式は $\cos \theta > -\frac{1}{2}$

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ を解くと

$$\theta = 120^\circ$$

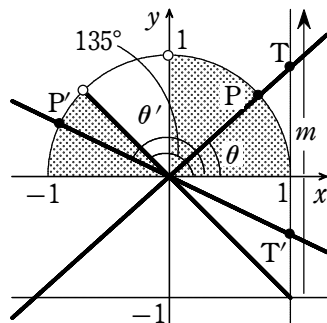
よって、右の図から、求める θ の範囲は
 $0^\circ \leq \theta < 120^\circ$



(3) $\tan \theta = -1$ を解くと

$$\theta = 135^\circ$$

よって、右の図から、求める θ の範囲は
 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ, 135^\circ < \theta \leq 180^\circ$



11

解説

余弦定理により $\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

正弦定理により $\frac{BC}{\sin A} = 2R$

$$\text{ゆえに } R = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$$

また、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} r(a + b + c)$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{1}{2} r(5 + 6 + 7)$$

$$\text{整理して } 6\sqrt{6} = 9r$$

$$\text{ゆえに } r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

別解 (後半) ヘロンの公式を用いると、 $2s = 5 + 6 + 7$ から $s = 9$

$$\text{よって } S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} r(5 + 6 + 7) = 6\sqrt{6} \text{ から } r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

12

解説

辺 AB , AC の B , C を越える延長上に、それぞれ点 D , E をとる。

$$\begin{aligned} (1) \quad \angle AI_a B &= \angle I_a BD - \angle I_a AB \\ &= \frac{1}{2} \angle CBD - \frac{1}{2} \angle A \\ &= \frac{1}{2} (\angle CBD - \angle A) \\ &= \frac{1}{2} \angle C \end{aligned}$$

$$(2) \quad \angle AI_a C = \angle I_a CE - \angle I_a AC = \frac{1}{2} \angle BCE - \frac{1}{2} \angle A$$

$$= \frac{1}{2} (\angle BCE - \angle A) = \frac{1}{2} \angle B$$

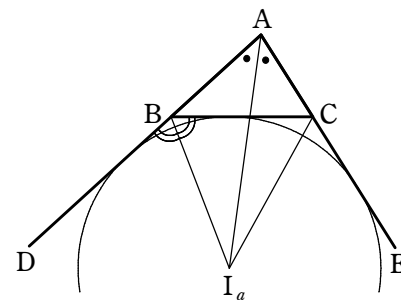
$$\text{よって } \angle BI_a C = \angle AI_a B + \angle AI_a C = \frac{1}{2} (\angle B + \angle C)$$

$$= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$$

13

解説

p_n は、 $(n-1)$ 回までに1の目が2回、他の目が $(n-3)$ 回出て、 n 回目に1の目が出る



確率であるから $p_n = {}_{n-1}C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \times \frac{1}{6} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{5^{n-3}}{6^n}$

したがって $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{5^{n-2}}{6^{n+1}} \times \frac{2}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{6^n}{5^{n-3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{n}{n-2}$

$\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ とすると $\frac{5n}{6(n-2)} < 1$

$6(n-2) > 0$ であるから $5n < 6(n-2)$ ゆえに $n > 12$

よって、 $n \geq 13$ のとき $p_n > p_{n+1}$

$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ とすると $5n > 6(n-2)$ ゆえに $n < 12$

よって、 $3 \leq n \leq 11$ のとき $p_n < p_{n+1}$

なお、 $n = 12$ のとき、 $\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$ となるから $p_n = p_{n+1}$

ゆえに $p_3 < p_4 < \dots < p_{12}$, $p_{12} = p_{13}$, $p_{13} > p_{14} > \dots$

よって、 p_n の値が最大となるのは $n = 12, 13$ のときである。

【別解】 $[p_{n+1} - p_n]$ の符号を調べる方針]

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{5^{n-2}}{6^{n+1}} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{5^{n-3}}{6^n} \\ &= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{5^{n-3}}{6^{n+1}} \{5n - 6(n-2)\} = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{5^{n-3}}{6^{n+1}} (12-n) \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{5^{n-3}}{6^{n+1}} > 0$ であるから、 $p_{n+1} - p_n$ の符号は $12-n$ の符号と一致する。

$3 \leq n \leq 11$ のとき $p_{n+1} - p_n > 0$ から $p_n < p_{n+1}$

$n = 12$ のとき $p_{n+1} - p_n = 0$ から $p_n = p_{n+1}$

$n \geq 13$ のとき $p_{n+1} - p_n < 0$ から $p_n > p_{n+1}$

ゆえに $p_3 < p_4 < \dots < p_{12}$, $p_{12} = p_{13}$, $p_{13} > p_{14} > \dots$

よって、 p_n の値が最大となるのは $n = 12, 13$ のときである。

14

解説

(1) $x < 1 \implies x \leq 1$ は明らかに真。

$x \leq 1 \implies x < 1$ は偽。 (反例) $x = 1$

したがって (ウ)

(2) $x < y \implies x^4 < y^4$ は偽。 (反例) $x = -1, y = 0$

$x^4 < y^4 \implies x < y$ は偽。 (反例) $x = 0, y = -1$

したがって (エ)

(3) $xy + 1 = x + y \iff (x-1)(y-1) = 0$

$\iff x, y$ のうち少なくとも1つは1 は真。

したがって (ア)

(4) $\angle A < 90^\circ \implies \triangle ABC$ が鋭角三角形 は偽。

(反例) $\angle A = 30^\circ < 90^\circ, \angle B = 100^\circ, \angle C = 50^\circ$

$\triangle ABC$ が鋭角三角形 $\implies \angle A < 90^\circ$ は真。

したがって (イ)

15

解説

与えられた命題の対偶は

「 a, b がともに3の倍数でないならば、 ab は3の倍数でない」である。

k, l を整数とすると

[1] $a = 3k + 1, b = 3l + 1$ のとき $ab = (3k+1)(3l+1) = 3(3kl+k+l)+1$

$3kl+k+l$ は整数であるから、 ab は3の倍数でない。

[2] $a = 3k + 1, b = 3l + 2$ のとき $ab = (3k+1)(3l+2) = 3(3kl+2k+l)+2$

$3kl+2k+l$ は整数であるから、 ab は3の倍数でない。

[3] $a = 3k + 2, b = 3l + 1$ のとき $ab = (3k+2)(3l+1) = 3(3kl+k+2l)+2$

$3kl+k+2l$ は整数であるから、 ab は3の倍数でない。

[4] $a = 3k + 2, b = 3l + 2$ のとき $ab = (3k+2)(3l+2) = 3(3kl+2k+2l+1)+1$

$3kl+2k+2l+1$ は整数であるから、 ab は3の倍数でない。

[1] ~ [4] により、対偶は真である。

したがって、与えられた命題は真である。