

1

(1) 1 ラジアンとは、 のことである。 に当てはまるものを、次の①～④のうちから1つ選べ。

① 半径が1，面積が1 の扇形の中心角の大きさ
② 半径が π ，面積が1 の扇形の中心角の大きさ
③ 半径が1，弧の長さが1 の扇形の中心角の大きさ
④ 半径が π ，弧の長さが1 の扇形の中心角の大きさ

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ である角 α を6倍して得られる角 6α を表す動径が角 α を表す動径と一致するという。角 α の大きさを求めよ。

解答

(1) ③ (2) $\alpha=\frac{2}{5}\pi$

解説

(1) 1 ラジアンとは、半径が1，弧の長さが1 の扇形の中心角の大きさ(③)である。
(2) n を整数とすると、条件から $6\alpha=\alpha+2n\pi$
ゆえに $5\alpha=2n\pi$ よって $\alpha=\frac{2}{5}\pi\times n$
 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから $n=1$ ゆえに $\alpha=\frac{2}{5}\pi$

2

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ， $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta-\cos\theta$ (2) $\sin\theta$ ， $\cos\theta$

解答

(1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (1点)(2) $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$ ， $\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$ (複号同順) (合計2点)

解説

(1) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$
 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから $\sin\theta>0$ ， $\cos\theta<0$
よって $\sin\theta-\cos\theta>0$
ゆえに $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ……①

(2) (1) と同様にして
 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
 $=1+2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$
よって $\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……②
①，② から $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$ ， $\cos\theta=\frac{\pm\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (複号同順)
これは $\sin\theta>0$ ， $\cos\theta<0$ を満たす。
したがって $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$ ， $\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$ (複号同順)

3

$0\leq\theta<2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

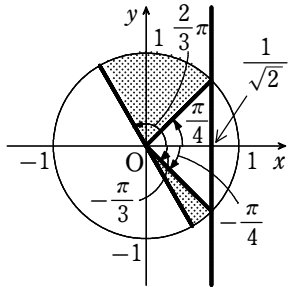
解答

(1) $\theta=\frac{\pi}{2}$ ， $\frac{2}{3}\pi$ ， $\frac{3}{2}\pi$ ， $\frac{5}{3}\pi$ (2) $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$ ， $\frac{7}{6}\pi\leq\theta<2\pi$

解説

(1) $2\theta+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……①
 $0\leq\theta<2\pi$ であるから
 $\frac{\pi}{3}\leq 2\theta+\frac{\pi}{3}<4\pi+\frac{\pi}{3}$ すなわち $\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{13}{3}\pi$
この範囲で、①を満たす t の値は
 $t=\frac{4}{3}\pi$ ， $\frac{5}{3}\pi$ ， $\frac{10}{3}\pi$ ， $\frac{11}{3}\pi$
よって $2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ ， $\frac{5}{3}\pi$ ， $\frac{10}{3}\pi$ ， $\frac{11}{3}\pi$
ゆえに $\theta=\frac{\pi}{2}$ ， $\frac{2}{3}\pi$ ， $\frac{3}{2}\pi$ ， $\frac{5}{3}\pi$

(2) $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}=t$ とおくと $\cos t\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ ……①
 $0\leq\theta<2\pi$ であるから
 $-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}<\pi-\frac{\pi}{3}$ すなわち $-\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{2}{3}\pi$
この範囲で、①を満たす t の値の範囲は
 $-\frac{\pi}{3}\leq t\leq-\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{\pi}{4}\leq t<\frac{2}{3}\pi$
よって $-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\leq-\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{\pi}{4}\leq\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi$
すなわち $0\leq\frac{\theta}{2}\leq\frac{\pi}{12}$ ， $\frac{7}{12}\pi\leq\frac{\theta}{2}<\pi$
したがって $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$ ， $\frac{7}{6}\pi\leq\theta<2\pi$



4

$0\leq\theta<2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta=0$ (2) $2\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1>0$

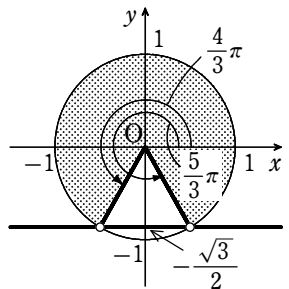
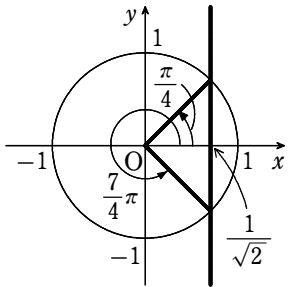
解答

(1) $\theta=\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{7}{4}\pi$ (2) $0\leq\theta<\frac{4}{3}\pi$ ， $\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1) 方程式を変形して $2(1-\cos^2\theta)-\sqrt{2}\cos\theta=0$
整理すると $2\cos^2\theta+\sqrt{2}\cos\theta-2=0$
因数分解して $(\sqrt{2}\cos\theta+2)(\sqrt{2}\cos\theta-1)=0$
 $-1\leq\cos\theta\leq 1$ より、 $\sqrt{2}\cos\theta+2>0$ であるから
 $\sqrt{2}\cos\theta-1=0$
すなわち $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$
 $0\leq\theta<2\pi$ であるから
 $\theta=\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{7}{4}\pi$

(2) 不等式を変形して $2(1-\sin^2\theta)+\sqrt{3}\sin\theta+1>0$
整理すると $2\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta-3<0$
因数分解して $(\sin\theta-\sqrt{3})(2\sin\theta+\sqrt{3})<0$
 $-1\leq\sin\theta\leq 1$ より、 $\sin\theta-\sqrt{3}<0$ であるから
 $2\sin\theta+\sqrt{3}>0$
すなわち $\sin\theta>-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $0\leq\theta<2\pi$ であるから $0\leq\theta<\frac{4}{3}\pi$ ， $\frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$



5

関数 $y=2\sin \theta +2\cos ^2\theta -1$ $\left(-\frac{\pi }{2}\leq \theta \leq \frac{\pi }{2}\right)$ の最大値・最小値， および最大値・最小値を与える θ の値を求めよ。

解答 $\theta =\frac{\pi }{6}$ で最大値 $\frac{3}{2}$ ， $\theta =-\frac{\pi }{2}$ で最小値 -3

解説

$\cos ^2\theta =1-\sin ^2\theta$ であるから

$$y=2\sin \theta +2(1-\sin ^2\theta)-1=-2\sin ^2\theta +2\sin \theta +1$$

$\sin \theta =t$ とおくと， $-\frac{\pi }{2}\leq \theta \leq \frac{\pi }{2}$ であるから $-1\leq t\leq 1$

y を t で表すと

$$y=-2t^2+2t+1=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

$-1\leq t\leq 1$ の範囲で， y は

$$t=\frac{1}{2} \text{ で最大値 } \frac{3}{2},$$

$$t=-1 \text{ で最小値 } -3 \text{ をとる。}$$

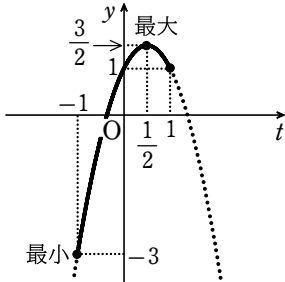
また， $-\frac{\pi }{2}\leq \theta \leq \frac{\pi }{2}$ であるから

$$t=\frac{1}{2} \text{ となるとき， } \sin \theta =\frac{1}{2} \text{ から } \theta =\frac{\pi }{6}$$

$$t=-1 \text{ となるとき， } \sin \theta =-1 \text{ から } \theta =-\frac{\pi }{2}$$

よって，この関数は $\theta =\frac{\pi }{6}$ で最大値 $\frac{3}{2}$ ，

$$\theta =-\frac{\pi }{2} \text{ で最小値 } -3 \text{ をとる。}$$



6

加法定理を用いて， 次の値を求めよ。

- (1) $\sin 15^\circ$ (2) $\tan 105^\circ$ (3) $\cos \frac{\pi }{12}$

解答 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $-2-\sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin 15^\circ &= \sin (60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解} \quad \sin 15^\circ &= \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \tan 105^\circ &= \tan (60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -2-\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \cos \frac{\pi }{12} &= \cos \left(\frac{\pi }{3} - \frac{\pi }{4}\right) = \cos \frac{\pi }{3} \cos \frac{\pi }{4} + \sin \frac{\pi }{3} \sin \frac{\pi }{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

7

$0\leq \alpha \leq \frac{\pi }{2}$ ， $0\leq \beta \leq \frac{\pi }{2}$ で $\sin \alpha +\cos \beta =\frac{5}{4}$ ， $\cos \alpha +\sin \beta =\frac{5}{4}$ のとき， $\sin (\alpha +\beta)$ ，

$\tan (\alpha +\beta)$ の値を求めよ。

解答 $\sin (\alpha +\beta)=\frac{9}{16}$ ， $\tan (\alpha +\beta)=\pm \frac{9\sqrt{7}}{35}$

解説

条件式それぞれの両辺を 2 乗して

$$\sin ^2\alpha +2\sin \alpha \cos \beta +\cos ^2\beta =\frac{25}{16}$$

$$\cos ^2\alpha +2\cos \alpha \sin \beta +\sin ^2\beta =\frac{25}{16}$$

$$\text{これらの辺々を加えると} \quad 2+2\sin (\alpha +\beta)=\frac{25}{8}$$

$$\text{よって} \quad \sin (\alpha +\beta)=\frac{9}{16}$$

$$\begin{aligned} \text{次に} \quad \tan ^2(\alpha +\beta) &= \frac{\sin ^2(\alpha +\beta)}{\cos ^2(\alpha +\beta)} = \frac{\sin ^2(\alpha +\beta)}{1-\sin ^2(\alpha +\beta)} \\ &= \frac{\left(\frac{9}{16}\right)^2}{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{9^2}{16^2-9^2} = \frac{9^2}{25 \cdot 7} \end{aligned}$$

$$0\leq \alpha \leq \frac{\pi }{2}, \quad 0\leq \beta \leq \frac{\pi }{2} \text{ であるから} \quad 0\leq \alpha +\beta \leq \pi$$

$$\text{ゆえに} \quad \tan (\alpha +\beta)=\pm \frac{9}{5\sqrt{7}}=\pm \frac{9\sqrt{7}}{35} \quad (\text{複号同順})$$

8

2 直線 $y=-3\sqrt{3}x+1$ ， $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+3$ のなす角 θ を求めよ。ただし， $0<\theta <\frac{\pi }{2}$ とする。

解答 $\theta =\frac{\pi }{3}$

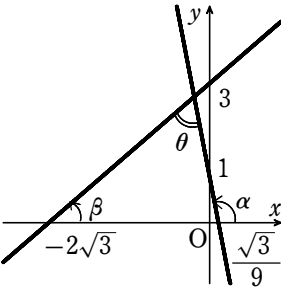
解説

x 軸の正の部分から 2 直線まで測った角を，それぞれ α ， β とすると，右の図より $\theta =\alpha -\beta$ である。

$\tan \alpha =-3\sqrt{3}$ ， $\tan \beta =\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan (\alpha -\beta) = \frac{\tan \alpha -\tan \beta }{1+\tan \alpha \tan \beta } \\ &= \frac{-3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+(-3\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$0<\theta <\frac{\pi }{2} \text{ であるから} \quad \theta =\frac{\pi }{3}$$



1

(1) 1 ラジアンとは、 のことである。 に当てはまるものを，次の ①～④ のうちから1つ選べ。

① 半径が1，面積が1 の扇形の中心角の大きさ

② 半径が π ，面積が1 の扇形の中心角の大きさ

③ 半径が1，弧の長さが1 の扇形の中心角の大きさ

④ 半径が π ，弧の長さが1 の扇形の中心角の大きさ

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ である角 α を6 倍して得られる角 6α を表す動径が角 α を表す動径と一致するという。角 α の大きさを求めよ。

2

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ， $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta-\cos\theta$

(2) $\sin\theta$ ， $\cos\theta$

3

$0\leq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

4

$0\leq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\sin^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta=0$

(2) $2\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1>0$

5

関数 $y=2\sin \theta +2\cos ^2\theta -1$ $\left(-\frac{\pi }{2}\leqslant \theta \leqslant \frac{\pi }{2}\right)$ の最大値・最小値，および最大値・最小値を与える θ の値を求めよ。

6

加法定理を用いて，次の値を求めよ。

- (1) $\sin 15^\circ$
- (2) $\tan 105^\circ$
- (3) $\cos \frac{\pi}{12}$

7

$0\leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi }{2}$ ， $0\leqslant \beta \leqslant \frac{\pi }{2}$ で $\sin \alpha +\cos \beta =\frac{5}{4}$ ， $\cos \alpha +\sin \beta =\frac{5}{4}$ のとき， $\sin (\alpha +\beta)$ ， $\tan (\alpha +\beta)$ の値を求めよ。

8

2 直線 $y=-3\sqrt{3}x+1$ ， $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+3$ のなす角 θ を求めよ。ただし， $0<\theta <\frac{\pi }{2}$ とする。