

1

次の式を計算(展開)しなさい。

$$(1) \frac{(a-b)^2}{4} - \frac{(-a+2b)(a+2b)}{3} + \frac{b(a+2b)}{2} \quad (2) (3a+2b)^2(3a-2b)^2$$

$$(3) (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \quad (4) (2a-3b+c)(2a+3b-c)$$

2

次の式を因数分解しなさい。

$$(1) 6x^2 - 7xy - 20y^2 \quad (2) 2x^2y - 16xy + 32y$$

$$(3) x^3 - x^2y + 9(y-x) \quad (4) x^4 + x^2 + 1$$

3

次の計算をしなさい。

$$(1) (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1) \quad (2) \sqrt{27} - 6\left(\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$$

4

$$(1) \sqrt{105-5a} \text{ が自然数となるような自然数 } a \text{ を求めなさい。}$$

$$(2) \sqrt{\frac{2205}{x}} \text{ が自然数となるような3桁の自然数 } x \text{ を求めなさい。}$$

5

$$4 - \sqrt{3} \text{ の整数部分を } a, \text{ 小数部分を } b \text{ とするとき, } \frac{1}{b} + \frac{1}{2a-b} \text{ の値を求めなさい。}$$

6

次の方程式を解きなさい。

$$(1) (2x-1)^2 = 16 \quad (2) (3x-5)^2 + 6(3x-7) = -14$$

$$(3) x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \quad (4) (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$$

7

次の x の2次方程式が()内に与えられた解をもつとき、定数 a の値ともう1つの解を求めなさい。

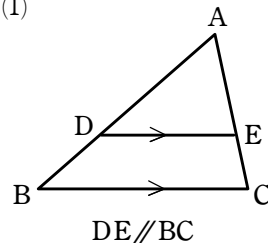
$$(1) x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \quad (x = -2) \quad (2) x^2 + ax + 4 = 0 \quad (x = -3 + \sqrt{5})$$

8

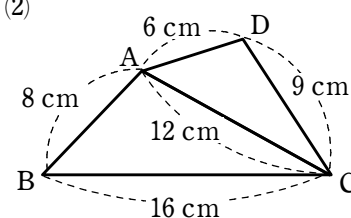
次の図において、相似な三角形を見つけ、記号 $\sim$ を使って表しなさい。

また、そのときに使った相似条件をいいなさい。

(1)

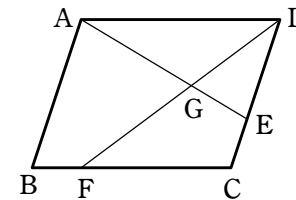


(2)



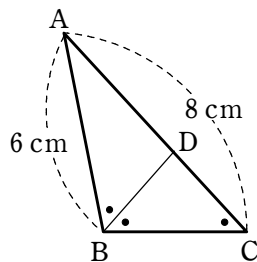
9

右の図において、四角形 ABCD は平行四辺形であり、
 $BF : FC = 1 : 3$, $DE : EC = 2 : 1$ である。
 このとき、 $DG : GF$ を求めなさい。



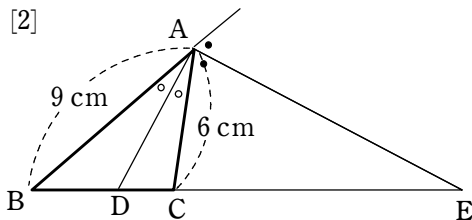
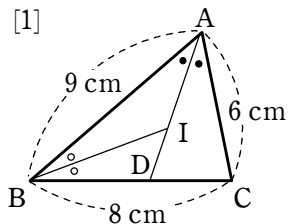
10

△ABCにおいて、 $AB=6\text{ cm}$ 、 $AC=8\text{ cm}$ である。
 $\angle B$ の二等分線と辺ACの交点をDとすると、
 $\angle DBC = \angle C$ となった。このとき、辺BCの長さを
 求めなさい。



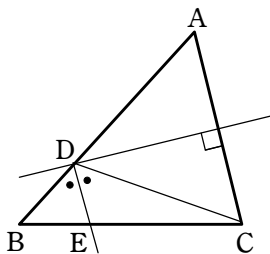
11

- (1) 図[1]において、ADが $\angle A$ の二等分線、BIが $\angle B$ の二等分線であるとき、
 $AI : ID$ を求めなさい。
- (2) 図[2]において、ADが $\angle A$ の二等分線、AEが $\angle A$ の外角の二等分線であるとき、
 $BD : DE$ を求めなさい。



12

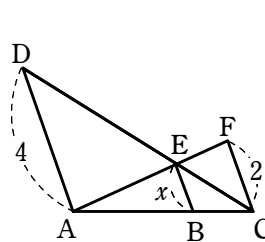
△ABCの辺ACの垂直二等分線と辺ABが交わるとき、
 その交点をDとする。 $\angle BDC$ の二等分線と辺BCの交点
 をEとすると、△ABCと△DBEは相似であることを
 証明しなさい。



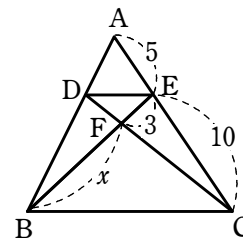
13

下の図で、(1)は $AD \parallel BE \parallel CF$ 、(2)は $DE \parallel BC$ 、(3)は $AC \parallel ED$ 、 $AD \parallel EF$ である。
 このとき、 x の値を求めなさい。

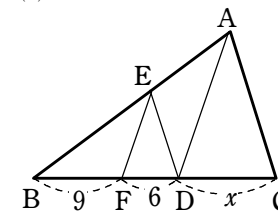
(1)



(2)



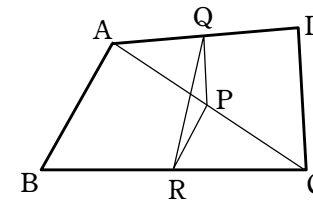
(3)



14

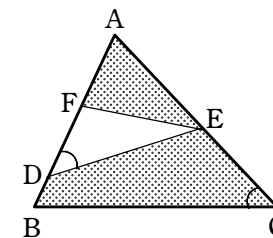
$AB=CD$ である四角形ABCDの対角線ACの中点を
 P、辺AD、BCの中点をそれぞれQ、Rとする。

- (1) 右の図のように△PQRができるとき、
 $\angle PQR = \angle PRQ$ であることを証明しなさい。
- (2) 3点P、Q、Rが一直線上に並ぶのは、四角形
 ABCDがどのような四角形であるときか答えなさい。



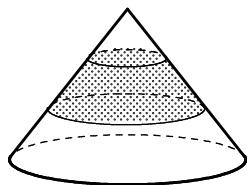
15

右の図で、 $\angle ACB = \angle ADE$ であり、Fは線分ADの
 中点である。 $BC : DE = 3 : 2$ のとき、△AFEの面積
 は四角形DBCEの面積の何倍か答えなさい。



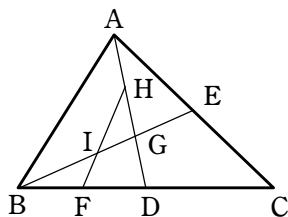
16

体積が $54\pi \text{ cm}^3$ の円錐を、底面に平行な平面で、高さが3等分されるように3つの立体に分けた。
このとき、真ん中の立体の体積を求めなさい。



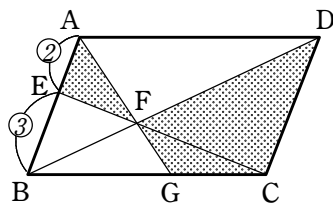
17

$\triangle ABC$ の中線 AD , BE の交点を G とし、線分 BD , AG の中点をそれぞれ F , H とする。
 BE と HF の交点を I とするとき、 $HI : IF$ を求めなさい。



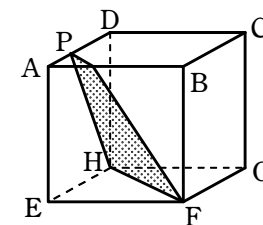
18

右の図において、四角形 $ABCD$ は平行四辺形で、 $AE : EB = 2 : 3$ である。
このとき、 $\triangle AEF$ と四角形 $DFGC$ の面積比を求めなさい。



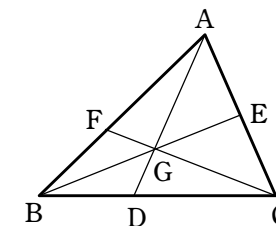
19

立方体 $ABCD-EFGH$ の辺 AD を $1 : 2$ に内分する点を P とし、3点 P , H , F を通る平面で立方体を切って2つの立体に分ける。頂点 A を含む方の立体の体積は、もとの立方体の体積の何倍か答えなさい。



20

右の図において、
 $AF : FB = 3 : 2$, $AG : GD = 5 : 2$
である。
このとき、 $AE : EC$ を求めなさい。



1

【解答】 (1) $\frac{7a^2-b^2}{12}$ (2) $81a^4-72a^2b^2+16b^4$
 (3) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ (4) $4a^2-9b^2-c^2+6bc$

2

【解答】 (1) $(2x-5y)(3x+4y)$ (2) $2y(x-4)^2$
 (3) $(x-y)(x+3)(x-3)$ (4) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

3

【解答】 (1) $2-2\sqrt{3}$ (2) $15\sqrt{2}-7\sqrt{3}$

4

【解答】 (1) $a=1, 16$ (2) $x=245$

5

【解答】 4

6

【解答】 (1) $x=\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ (3) $x=\pm\sqrt{3}, \pm 2$
 (4) $x=1, 2, 3, 4$

7

【解答】 (1) $a=-1$, もう1つの解 $x=1$ (2) $a=6$, もう1つの解 $x=-3-\sqrt{5}$

8

【解答】 (1) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, 2組の角がそれぞれ等しい
 (2) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, 3組の辺の比がすべて等しい

9

【解答】 4:5

10

【解答】 $\frac{14}{3}$ cm

11

【解答】 (1) 15:8 (2) 1:4

12

【解答】 略

13

【解答】 (1) $x=\frac{4}{3}$ (2) $x=9$ (3) $x=10$

14

【解答】 (1) 略 (2) 平行四辺形

15

【解答】 $\frac{2}{5}$ 倍

16

【解答】 $14\pi \text{ cm}^3$

17

【解答】 2:1

18

【解答】 6:31

19

【解答】 $\frac{13}{54}$ 倍

20

【解答】 1:1

1

【解説】

(1) $\frac{(a-b)^2}{4} - \frac{(-a+2b)(a+2b)}{3} + \frac{b(a+2b)}{2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3(a-b)^2 - 4(-a+2b)(a+2b) + 6b(a+2b)}{12} \\
 &= \frac{3(a^2 - 2ab + b^2) - 4(-a^2 + 4b^2) + 6(ab + 2b^2)}{12} \\
 &= \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2 + 4a^2 - 16b^2 + 6ab + 12b^2}{12} \\
 &= \frac{7a^2 - b^2}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (3a+2b)^2(3a-2b)^2 &= \{(3a+2b)(3a-2b)\}^2 \\
 &= (9a^2 - 4b^2)^2 \\
 &= (9a^2)^2 - 2 \times 9a^2 \times 4b^2 + (4b^2)^2 \\
 &= 81a^4 - 72a^2b^2 + 16b^4 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) &= (x-1)(x-4) \times (x-2)(x-3) \\
 &= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) \\
 &= \{(x^2 - 5x) + 4\}\{(x^2 - 5x) + 6\} \\
 &= (x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 \\
 &= x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 - 50x + 24 \\
 &= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad (2a-3b+c)(2a+3b-c) &= \{2a-(3b-c)\}\{2a+(3b-c)\} \\
 &= (2a)^2 - (3b-c)^2 \\
 &= 4a^2 - (9b^2 - 6bc + c^2) \\
 &= 4a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2 \\
 &= 4a^2 - 9b^2 - c^2 + 6bc
 \end{aligned}$$

2

解説

$$(1) \quad 6x^2 - 7xy - 20y^2 = (2x-5y)(3x+4y) \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 2x^2y - 16xy + 32y &= 2y(x^2 - 8x + 16) \\
 &= 2y(x-4)^2 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad x^3 - x^2y + 9(y-x) = x^2(x-y) - 9(x-y)$$

$$\begin{array}{rcl}
 2 & \times & -5 \rightarrow -15 \\
 3 & & 4 \rightarrow 8 \\
 \hline
 6 & -20 & -7
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-y)(x^2-9) \\
 &= (x-y)(x+3)(x-3) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad x^4 + x^2 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \\
 &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\
 &= \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

3

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1) &= \{(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{2}\}\{(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}\} \\
 &= (\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 - 2 \\
 &= 2 - 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sqrt{27} - 6\left(\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} &= 3\sqrt{3} - 6\left(\frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} - \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{54}{3}} \\
 &= 3\sqrt{3} - 6\left(\frac{5\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{2}\right) + \sqrt{18} \\
 &= 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\
 &= 15\sqrt{2} - 7\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

4

解説

(1) $\sqrt{105-5a} = \sqrt{5(21-a)}$ であるから、 $\sqrt{105-5a}$ が自然数となるのは、 $5(21-a)$ が自然数の2乗になるときである。

自然数の2乗になるためには、 $5(21-a)$ を素因数分解したときに、すべての指数が偶数になっている必要がある。

よって、 $21-a$ の値は 5×1^2 または 5×2^2

$$[1] \quad 21-a = 5 \times 1^2 \text{ のとき} \quad a = 21 - 5 = 16$$

$$[2] \quad 21-a = 5 \times 2^2 \text{ のとき} \quad a = 21 - 20 = 1$$

したがって $a = 1, 16$

(2) $\sqrt{\frac{2205}{x}}$ が自然数となるのは、 $\frac{2205}{x}$ が自然数の2乗になるときである。

自然数の2乗になるためには、 $\frac{2205}{x}$ を素因数分解したときに、すべての指数が偶数になっている必要がある。

$\frac{2205}{x} = \frac{3^2 \times 5 \times 7^2}{x}$ であるから、このような条件を満たす自然数 x をすべて書き出すと

$$5, 3^2 \times 5, 7^2 \times 5, 3^2 \times 5 \times 7^2$$

すなわち 5, 45, 245, 2205

x は3桁の自然数であるから $x = 245$

5

解説

$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ であるから $1 < \sqrt{3} < 2$

各辺に -1 をかけて $-2 < -\sqrt{3} < -1$

各辺に 4 をたして $2 < 4 - \sqrt{3} < 3$

よって $a = 2, b = 4 - \sqrt{3} - 2 = 2 - \sqrt{3}$

したがって $\frac{1}{b} + \frac{1}{2a-b} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2 \times 2 - (2-\sqrt{3})}$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \quad \dots\dots (*)$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$$

別解 $(*) = \frac{(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 4$

6

解説

(1) $(2x-1)^2 = 16$

$$2x-1 = \pm 4$$

すなわち $2x-1 = 4$ または $2x-1 = -4$

よって $x = \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$

(2) $(3x-5)^2 + 6(3x-7) = -14$

$$9x^2 - 30x + 25 + 18x - 42 = -14$$

整理すると $9x^2 - 12x - 3 = 0$

$$3x^2 - 4x - 1 = 0$$

よって $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \times (-1)}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

(3) $x^2 = t$ とおくと、方程式は次のようになる。

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$(t-3)(t-4) = 0$$

よって $t = 3, 4$

すなわち $x^2 = 3$ または $x^2 = 4$

したがって $x = \pm\sqrt{3}, \pm 2$

(4) $x^2 - 5x = t$ とおくと、方程式は次のようになる。

$$t^2 + 10t + 24 = 0$$

$$(t+4)(t+6) = 0$$

よって $t = -4, -6$

すなわち $x^2 - 5x = -4$ または $x^2 - 5x = -6$

$x^2 - 5x = -4$ から $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

したがって $x = 1, 4$

$x^2 - 5x = -6$ から $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

したがって $x = 2, 3$

答 $x = 1, 2, 3, 4$

7

解説

(1) $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ が $x = -2$ を解にもつから

$$(-2)^2 - a \times (-2) + a^2 - 3 = 0$$

すなわち $a^2 + 2a + 1 = 0$ よって $(a+1)^2 = 0$

したがって $a = -1$

$a = -1$ のとき、2次方程式は次のようになる。

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

よって $x = -2, 1$

したがって、もう1つの解は $x = 1$

(2) $x^2 + ax + 4 = 0$ が $x = -3 + \sqrt{5}$ を解にもつから

$$(-3 + \sqrt{5})^2 + a \times (-3 + \sqrt{5}) + 4 = 0$$

すなわち $(9 - 6\sqrt{5} + 5) + (-3 + \sqrt{5})a + 4 = 0$

よって $(3 - \sqrt{5})a = 18 - 6\sqrt{5}$

したがって $a = \frac{18 - 6\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{6(3 - \sqrt{5})}{3 - \sqrt{5}} = 6$

$a = 6$ のとき、2次方程式は次のようになる。

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

よって $x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 1 \times 4} = -3 \pm \sqrt{5}$

したがって、もう1つの解は $x = -3 - \sqrt{5}$

8

解説

(1) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

相似条件は 2組の角がそれぞれ等しい

(2) $\triangle ABC \sim \triangle DAC$

相似条件は 3組の辺の比がすべて等しい

9

解説

線分 AE, BC を延長して、その交点を H とする。

AD // CH であるから

$$AD : HC = DE : CE$$

よって $AD : HC = 2 : 1$

したがって $HC = \frac{1}{2}AD$ ①

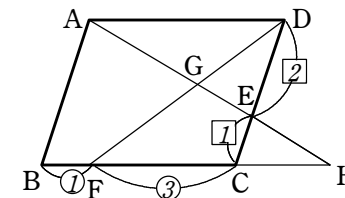
仮定から $BF : FC = 1 : 3$

よって $FC = \frac{3}{4}BC = \frac{3}{4}AD$ ②

①, ② から $FH = FC + CH = \frac{3}{4}AD + \frac{1}{2}AD = \frac{5}{4}AD$

AD // FH であるから

$$DG : GF = AD : FH = AD : \frac{5}{4}AD = 4 : 5$$



10

解説

$\triangle ABC$ と $\triangle ADB$ において

仮定から $\angle DBC = \angle ACB, \angle DBC = \angle ABD$

よって $\angle ACB = \angle ABD$

また $\angle BAC = \angle DAB$ (共通)

2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ABC \sim \triangle ADB$

したがって $AB : AD = AC : AB$

$AD = x$ cm とすると $6 : x = 8 : 6$

よって $6 \times 6 = x \times 8$

これを解くと $x = \frac{9}{2}$

したがって $CD = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$ (cm)

$\angle DBC = \angle DCB$ であるから $BD = CD$

よって $BD = \frac{7}{2}$ cm

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$ であるから $BC : DB = AC : AB$

$BC = y$ cm とすると $y : \frac{7}{2} = 8 : 6$

したがって $y \times 6 = \frac{7}{2} \times 8$

これを解くと $y = \frac{14}{3}$

よって $BC = \frac{14}{3}$ cm

11

解説

(1) AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

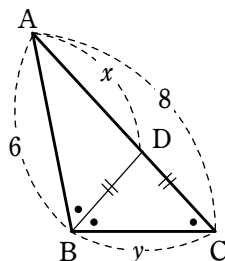
よって $BD : DC = 9 : 6 = 3 : 2$

したがって $BD = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5}$

BI は $\angle ABD$ の二等分線であるから

$$AI : ID = BA : BD$$

よって $AI : ID = 9 : \frac{24}{5} = 15 : 8$



(2) AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC$$

よって

$$BD : DC = 9 : 6 = 3 : 2$$

したがって

$$BD = \frac{3}{5}BC, DC = \frac{2}{5}BC \dots\dots ①$$

AE は $\angle BAC$ の外角の二等分線であるから

$$BE : EC = AB : AC$$

よって

$$BE : EC = 3 : 2$$

すなわち

$$BC : CE = (3 - 2) : 2 = 1 : 2$$

したがって

$$CE = 2BC \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ から } DE = DC + CE = \frac{2}{5}BC + 2BC = \frac{12}{5}BC$$

$$\text{よって } BD : DE = \frac{3}{5}BC : \frac{12}{5}BC = 1 : 4$$

12

解説

証明 垂直二等分線上の点から線分の2つの端点までの距離は等しいから、 $\triangle DAC$ は $DA = DC$ の二等辺三角形である。

よって $\angle DAC = \angle DCA$

したがって、 $\triangle DAC$ において、内角と外角の性質から

$$\angle BDC = 2\angle DAC$$

また、仮定より $\angle BDC = 2\angle BDE$

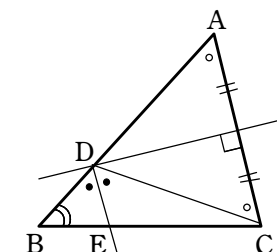
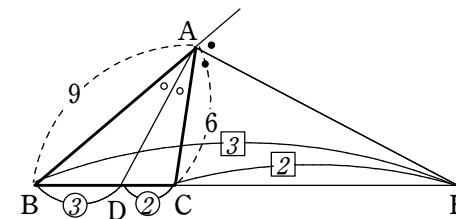
よって $\angle DAC = \angle BDE$

すなわち $\angle BAC = \angle BDE$

また $\angle ABC = \angle DBE$ (共通)

したがって、 $\triangle ABC$ と $\triangle DBE$ において、2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABC \sim \triangle DBE \quad \text{終}$$



13

解説

- (1) $BE \parallel CF$ であるから $BE : CF = AE : AF$
 よって $x : 2 = AE : AF$ ①

- $AD \parallel CF$ であるから $AE : EF = AD : FC$
 よって $AE : EF = 4 : 2 = 2 : 1$ ②

- ①, ② から $x : 2 = 2 : (2 + 1)$

これを解くと $x = \frac{4}{3}$

- (2) $DE \parallel BC$ であるから

$$EF : BF = DE : BC$$

- よって $3 : x = DE : BC$ ①

$DE \parallel BC$ であるから

$$DE : BC = AE : AC \\ = 5 : (5 + 10) = 1 : 3 \quad \text{..... ②}$$

- ①, ② から $3 : x = 1 : 3$

これを解くと $x = 9$

- (3) $AC \parallel ED$ であるから

$$BD : DC = BE : EA$$

- よって $(9 + 6) : x = BE : EA$ ①

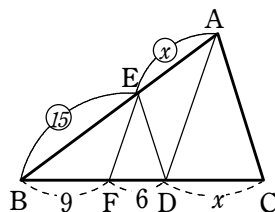
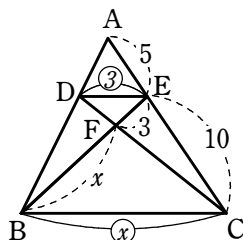
$AD \parallel EF$ であるから

$$BE : EA = BF : FD$$

- よって $BE : EA = 9 : 6 = 3 : 2$ ②

- ①, ② から $15 : x = 3 : 2$

これを解くと $x = 10$



14

解説

- (1) **証明** $\triangle ACD$ において, 点 P, Q はそれぞれ辺 AC, AD の中点である。

よって, 中点連結定理により

$$PQ \parallel CD \quad \text{..... ①}$$

$$PQ = \frac{1}{2} CD \quad \text{..... ②}$$

同様にして $PR \parallel AB$ ③, $PR = \frac{1}{2} AB$ ④

また, 仮定より $AB = CD$ ⑤

②, ④, ⑤ から $PQ = PR$

よって, $\triangle PQR$ は $PQ = PR$ の二等辺三角形であるから

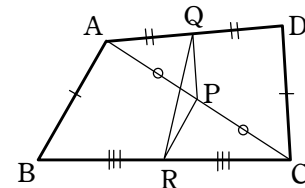
$$\angle PQR = \angle PRQ \quad \text{終}$$

- (2) 3点 P, Q, R が一直線上に並ぶとき $PQ \parallel PR$

これと, ①, ③ から $AB \parallel CD$ ⑥

⑤, ⑥ より, 1組の対辺が平行でその長さが等しいから, 四角形 ABCD は平行四辺形である。

したがって, 3点 P, Q, R が一直線上に並ぶのは, 四角形 ABCD が平行四辺形のと
 きである。



15

解説

$\triangle ABC$ の面積を S とする。

$\triangle ABC \sim \triangle AED$ であり, 相似比は

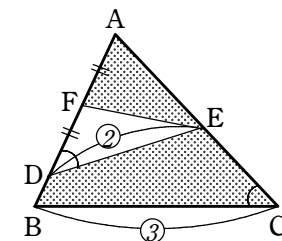
$$BC : ED = 3 : 2$$

よって, 面積比は

$$\triangle ABC : \triangle AED = 3^2 : 2^2 = 9 : 4$$

したがって $\triangle AED = \frac{4}{9} S$

よって (四角形 DBCE の面積) = $\triangle ABC - \triangle AED$



$$= S - \frac{4}{9}S = \frac{5}{9}S$$

また $\triangle AFE : \triangle AED = AF : AD = 1 : (1+1) = 1 : 2$

$$\text{ゆえに } \triangle AFE = \frac{1}{2} \triangle AED = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}S = \frac{2}{9}S$$

$$\text{したがって } \frac{2}{9}S \div \frac{5}{9}S = \frac{2}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{図 } \frac{2}{5} \text{ 倍}$$

16

解説

3等分された立体を、上から順に A, B, C とする。

また、 A と B を合わせた円錐を D 、もとの円錐を E とする。

$A \sim D$ で、相似比は $1 : 2$ であるから

$$(A \text{ の体積}) : (D \text{ の体積}) = 1^3 : 2^3 = 1 : 8 \quad \dots\dots ①$$

$A \sim E$ で、相似比は $1 : 3$ であるから

$$(A \text{ の体積}) : (E \text{ の体積}) = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

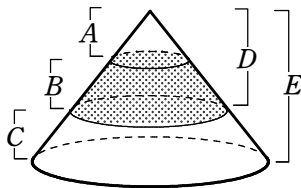
E の体積が $54\pi \text{ cm}^3$ であるから

$$(A \text{ の体積}) = \frac{1}{27} \times (E \text{ の体積}) = \frac{1}{27} \times 54\pi = 2\pi (\text{cm}^3)$$

よって、①から

$$(D \text{ の体積}) = 8 \times (A \text{ の体積}) = 8 \times 2\pi = 16\pi (\text{cm}^3)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } (B \text{ の体積}) &= (D \text{ の体積}) - (A \text{ の体積}) \\ &= 16\pi - 2\pi = 14\pi (\text{cm}^3) \end{aligned}$$



17

解説

AD, BE は $\triangle ABC$ の中線であるから、

その交点 G は $\triangle ABC$ の重心である。

よって $AG : GD = 2 : 1$

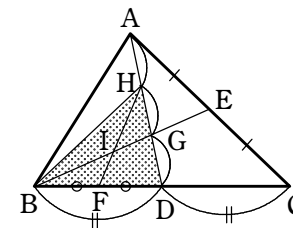
仮定より、 $AG : HG = 2 : 1$ であるから

$$HG : GD = 1 : 1$$

したがって、 HF, BG は $\triangle HBD$ の中線であるから、

その交点 I は $\triangle HBD$ の重心である。

よって $HI : IF = 2 : 1$



18

解説

平行四辺形 $ABCD$ の面積を S とする。

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ であるから

$$\triangle ABD = \frac{1}{2}S$$

$EB \parallel DC$ であるから

$$BF : FD = EB : DC = 3 : 5$$

よって $\triangle ABD : \triangle ABF = BD : BF$

$$= (3+5) : 3 = 8 : 3$$

また $\triangle ABF : \triangle AEF = AB : AE = (2+3) : 2 = 5 : 2$

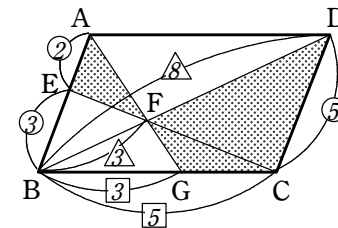
$$\begin{aligned} \text{したがって } \triangle AEF &= \frac{2}{5} \triangle ABF = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{8} \triangle ABD \right) \\ &= \frac{3}{20} \times \frac{1}{2} S = \frac{3}{40} S \end{aligned}$$

$AD \parallel BG$ であるから $BG : AD = BF : FD = 3 : 5$

よって $BG : BC = 3 : 5$

$$\text{ゆえに } \triangle BGF = \frac{BG}{BC} \times \frac{BF}{BD} \times \triangle BCD = \frac{3}{5} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} S = \frac{9}{80} S$$

$$\text{よって } (\text{四角形 DFGC の面積}) = \triangle BCD - \triangle BGF = \frac{1}{2} S - \frac{9}{80} S = \frac{31}{80} S$$



したがって $(\triangle AEF \text{ の面積}) : (\text{四角形 DFGC の面積}) = \frac{3}{40}S : \frac{31}{80}S = 6 : 31$

19

解説

3点 P, H, F を通る平面と辺 AB の交点を Q とし,
EA, FQ, HP の延長の交点を O とする。

三角錐 OEFH と三角錐 OAQP は相似で、相似比は

$$EH : AP = AD : AP = 3 : 1$$

よって、体積比は $3^3 : 1^3 = 27 : 1$

立方体を切ってできる、頂点 A を含む方の立体は、
三角錐 OEFH から三角錐 OAQP を取り除いたものである。

よって、その体積を V 、三角錐 OAQP の体積を V'
とすると

$$V : V' = (27 - 1) : 1 = 26 : 1 \quad \dots\dots ①$$

ここで、 $AP \parallel EH$ であるから $OA : OE = AP : EH$

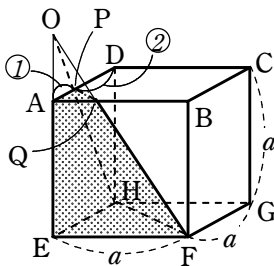
立方体の1辺の長さを a とすると $OA : (OA + a) = 1 : 3$

$$\text{よって} \quad OA = \frac{1}{2}a$$

$$\text{三角錐 OAQP の体積は} \quad V' = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}a \times \frac{1}{3}a \right) \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{108}a^3$$

$$① \text{ から} \quad V = 26 \times V' = \frac{13}{54}a^3$$

$$\text{立方体の体積は } a^3 \text{ であるから} \quad \frac{13}{54}a^3 \div a^3 = \frac{13}{54} \quad \text{答} \quad \frac{13}{54} \text{ 倍}$$



20

解説

$\triangle ABD$ と直線 FC において、メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CD} \times \frac{DG}{GA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$DG : GA = 2 : 5$, $AF : FB = 3 : 2$ であるから

$$\frac{BC}{CD} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\text{よって} \quad \frac{BC}{CD} = \frac{5}{3}$$

したがって $BC : CD = 5 : 3$

よって $BD : DC = (5 - 3) : 3 = 2 : 3$

$\triangle ABC$ において、チェバの定理により

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$BD : DC = 2 : 3$, $AF : FB = 3 : 2$ であるから

$$\frac{2}{3} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\text{よって} \quad \frac{CE}{EA} = 1$$

したがって $AE : EC = 1 : 1$ 答

