

1

解説

- (1) $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ であるから, 三角関数の合成により

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi \text{ であるから, } y \text{ は } \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{6}$$

で最大値 $^{\times}2$ をとる。

- (2) (i) $p=0$ のとき $y = \sin \theta$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ であるから, } y \text{ は } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ で最大値 } ^{\ast}1 \text{ をとる。}$$

- (ii) $p > 0$ のとき

加法定理 $\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$ を用いると

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{1+p^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \sin \theta + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{1+p^2} (\sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta) \\ &= \sqrt{1+p^2} (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \\ &= \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha) \quad (^{\ast} \textcircled{9}) \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし, α は

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad (^{\ast} \textcircled{10}), \quad \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad (^{\ast} \textcircled{11}), \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } -\alpha \leq \theta - \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ であるから, } \cos(\theta - \alpha) \text{ は } \theta - \alpha = 0 \text{ すな}$$

わち $\theta = \alpha$ で最大となる。 $\sqrt{1+p^2} > 0$ であるから, このとき y も最大となる。

よって, y は $\theta = \alpha$ ($^{\ast} \textcircled{10}$) で最大値 $\sqrt{1+p^2}$ ($^{\ast} \textcircled{9}$) をとる。

- (iii) $p < 0$ のとき

(ii) と同様に $y = \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha)$ と表すことができる。ただし, α は

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

を満たすものとする。

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } -\alpha \leq \theta - \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ であるから, } \cos(\theta - \alpha) \text{ は } \theta - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大となる。 $\sqrt{1+p^2} > 0$ であるから, このとき y も最大となる。

よって、 y は $\theta = \frac{\pi}{2}$ (㉞) で最大値 1 (㉟) をとる。

別解 (iii) $p < 0$ のとき

加法定理 $\sin(\theta + \beta) = \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta$ を用いると

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta + p \cos \theta \\ &= \sqrt{1+p^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \sin \theta + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos \theta \right) \\ &= \sqrt{1+p^2} (\cos \beta \sin \theta + \sin \beta \cos \theta) \\ &= \sqrt{1+p^2} (\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta) \\ &= \sqrt{1+p^2} \sin(\theta + \beta) \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし、 β は

$$\sin \beta = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < 0$$

を満たすものとする。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\beta \leq \theta + \beta \leq \frac{\pi}{2} + \beta$ であるから、 $\sin(\theta + \beta)$ は $\theta + \beta = \frac{\pi}{2} + \beta$

すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大となる。 $\sqrt{1+p^2} > 0$ であるから、このとき y も最大となる。

よって、 y は $\theta = \frac{\pi}{2}$ (㉞) で最大値 1 (㉟) をとる。

2

解説

$$(1) \quad f(0) = \frac{1+1}{2} = {}^{\text{ア}}1, \quad g(0) = \frac{1-1}{2} = {}^{\text{イ}}0$$

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係により

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 1$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = 0$ のとき成り立つ。

よって、 $f(x)$ は $x = {}^{\text{ウ}}0$ で最小値 ${}^{\text{エ}}1$ をとる。

$$g(x) = -2 \text{ とすると } \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -2$$

分母を払うと $2^x - 2^{-x} = -4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 1 = 0$

$2^x > 0$ であるから $2^x = -2 + \sqrt{5}$ すなわち $2^x = \sqrt{5} - 2$

よって、 $g(x) = -2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{5} - {}^{\text{カ}}2)$ である。

$$(2) \quad f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^x}{2} = \frac{2^x + 2^{-x}}{2} = f(x) \quad ({}^{\text{キ}} \textcircled{0}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -\frac{2^x - 2^{-x}}{2} = -g(x) \quad ({}^{\text{ク}} \textcircled{3}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 &= \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4^x + 2 + 4^{-x}}{4} - \frac{4^x - 2 + 4^{-x}}{4} = {}^{\text{ケ}}1 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$g(2x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2} = 2 \cdot \frac{2^x + 2^{-x}}{2} \cdot \frac{2^x - 2^{-x}}{2} = {}^{\text{コ}}2f(x)g(x) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \text{別解 } \textcircled{3} \quad \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 &= \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\} \\ &= 2^x \cdot 2^{-x} = {}^{\text{セ}}1 \end{aligned}$$

(3) (1) より $f(0) = 1, g(0) = 0$ であるから、太郎さんが考えた式 (A) ～ (D) に $\beta = 0$ を代入すると、それぞれ次のようになる。

$$(A) \quad f(\alpha) = g(\alpha) \quad (B) \quad f(\alpha) = f(\alpha) \quad (C) \quad g(\alpha) = f(\alpha)$$

$$(D) \quad g(\alpha) = -g(\alpha) \text{ より } g(\alpha) = 0$$

$f(0) \neq g(0)$ であるから、(A), (C) はつねには成り立たないことがわかる。

また、 $g(1) = \frac{2 - 2^{-1}}{2} \neq 0$ であるから、 $\alpha = 1, \beta = 0$ のとき (D) は成り立たない。

よって、式 (A) ～ (D) のうち、(B) 以外の 3 つは成り立たないことがわかる。(${}^{\text{サ}} \textcircled{1}$)

参考 (B) の左辺と右辺をそれぞれ計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= \frac{2^{\alpha + \beta} + 2^{-\alpha - \beta}}{2} \\ f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) &= \frac{2^\alpha + 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta + 2^{-\beta}}{2} + \frac{2^\alpha - 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta - 2^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(2^{\alpha + \beta} + 2^{\alpha - \beta} + 2^{-\alpha + \beta} + 2^{-\alpha - \beta}) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4}(2^{\alpha+\beta} - 2^{\alpha-\beta} - 2^{-\alpha+\beta} + 2^{-\alpha-\beta})$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

したがって、(B) はつねに成り立つ。

3

解説

(1) ①, ② の 2 次関数のグラフと y 軸との交点の y 座標はともに 3 である。

① について $y' = 6x + 2$, ② について $y' = 4x + 2$ であるから, $x = 0$ でともに $y' = 2$ となる。

よって, y 軸との交点における接線の方程式は $y = {}^{\text{ア}}2x + {}^{\text{イ}}3$ である。

y 軸との交点における接線の方程式が $y = 2x + 3$ となる 2 次関数は, a を 0 でない実数として $y = ax^2 + 2x + 3$ と表されるから, ① ~ ⑤ の 2 次関数のうちであてはまるものは $y = -x^2 + 2x + 3$ (ウ ④) である。

a, b, c を 0 でない実数とする。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $(0, {}^{\text{エ}}c)$ における接線を ℓ とすると, その方程式は $y = {}^{\text{オ}}bx + {}^{\text{カ}}c$ である。

$$bx + c = 0 \text{ を解くと } x = -\frac{c}{b}$$

よって, 接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\frac{{}^{\text{キク}}-c}{{}^{\text{ケ}}b}$ である。

a, b, c が正の実数であるとき, 曲線 $y = ax^2 + bx + c$

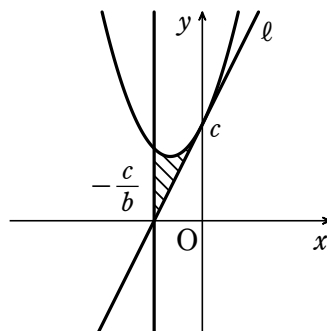
と接線 ℓ および直線 $x = -\frac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

$$S = \int_{-\frac{c}{b}}^0 \{(ax^2 + bx + c) - (bx + c)\} dx$$

$$= \int_{-\frac{c}{b}}^0 ax^2 dx = \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_{-\frac{c}{b}}^0$$

$$= \frac{ac}{{}^{\text{サ}}3b} \dots\dots ③$$



③において, $a = 1$ とし, S の値が一定となるように正の実数 b, c の値を変化させる。

このとき, $S = \frac{c^3}{{}^{\text{シ}}3b^3}$ から

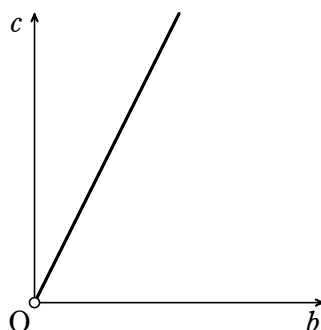
$$c^3 = {}^{\text{ス}}3Sb^3$$

ゆえに $c = {}^{\text{セ}}\sqrt[3]{3S}b$

S の値が一定であるから, $\sqrt[3]{3S}$ は正の定数である。

よって, b と c の関係を表すグラフの概形は

右の図のようになる。(ツ ⑩)



(2) a, b, c, d を 0 でない実数とする。

曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ と y 軸との交点 $(0, d)$ における接線の方程式は $y = {}^{\circ}cx + {}^{\circ}d$ である。

次に、 $g(x) = cx + d$ とし、 $f(x) - g(x)$ について考える。

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{ とおくと } h(x) = ax^3 + bx^2 = ax^2\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

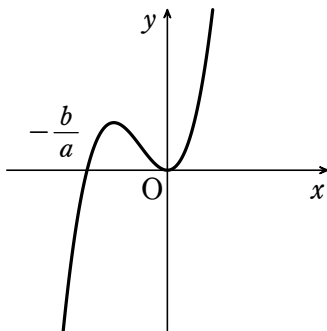
$$h(x) = 0 \text{ を解くと } x = 0 \text{ (重解), } -\frac{b}{a}$$

$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $h(x) = 0$ の解であるから、 $\frac{\text{タチ}}{\text{ツ}} -\frac{b}{a}$ と ${}^{\circ}0$ である。

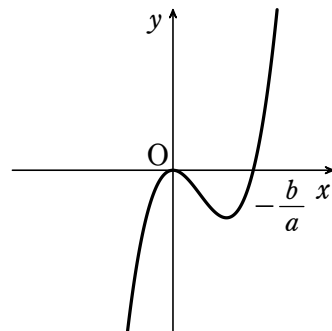
また、 x が $-\frac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき、 $|f(x) - g(x)|$ すなわち $|h(x)|$ の値が最大となる x の値を求める。

a, b の正負によって、 $y = h(x)$ のグラフの概形は、次の 4 つの場合に分けられる。

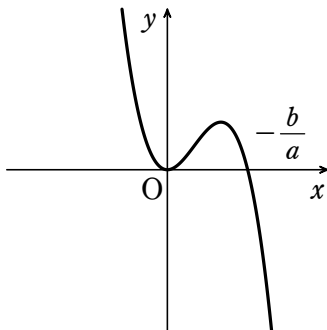
[1] $a > 0, b > 0$ のとき



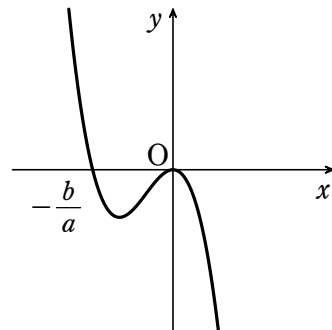
[2] $a > 0, b < 0$ のとき



[3] $a < 0, b > 0$ のとき



[4] $a < 0, b < 0$ のとき



いずれの場合も $h(x)$ は $-\frac{b}{a}$ と 0 の間で極大値または極小値をとり、このとき $|h(x)|$ は最大となる。

$$\text{ここで } h'(x) = 3ax^2 + 2bx = 3ax\left(x + \frac{2b}{3a}\right)$$

$$h'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, -\frac{2b}{3a}$$

よって、 x が $-\frac{b}{a}$ と 0 の間を動くとき、 $|h(x)|$ すなわち $|f(x) - g(x)|$ の値が最大と

なるのは、 $x = \frac{\text{トナニ}-2b}{\text{ヌネ}3a}$ のときである。

4

解説

(1) $\{a_n\}$ は初項 3、公差 p の等差数列、 $\{b_n\}$ は初項 3、公比 r の等比数列であるから

$$a_n = {}^{\text{ア}}3 + (n-1)p \quad \cdots \cdots \text{②}, \quad a_{n+1} = 3 + np \quad \cdots \cdots \text{③}, \quad b_n = {}^{\text{イ}}3r^{n-1}$$

$r \neq 0$ により、すべての自然数 n について、 $b_n \neq 0$ となる。

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = r \text{ であるから、①の両辺を } b_n \text{ で割ると} \quad ra_n - 2a_{n+1} + 3r = 0$$

$$\text{すなわち} \quad {}^{\text{ウ}}2a_{n+1} = r(a_n + {}^{\text{エ}}3) \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{④に②と③を代入すると} \quad 2(3+np) = r\{3+(n-1)p+3\}$$

$$\text{変形すると} \quad 6+2pn = r(-p+6) + rpn$$

$$\text{よって} \quad (r-{}^{\text{オ}}2)pn = r(p-{}^{\text{カ}}6) + {}^{\text{キ}}6 \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

$$\text{⑤がすべての } n \text{ で成り立つことおよび } p \neq 0 \text{ により} \quad r = 2$$

$$\text{これを⑤に代入して} \quad 0 = 2(p-6) + 6 \quad \text{よって} \quad p = {}^{\text{ク}}3$$

以上から、すべての自然数 n について、 a_n と b_n が正であることもわかる。

$$(2) \text{ ⑥を変形すると} \quad (a_n+3)c_{n+1} = 4a_{n+1}c_n$$

$$a_n \text{ が} {}^{\text{ク}}3 \text{ 正であるから} \quad a_n + 3 \neq 0$$

$$\text{よって} \quad c_{n+1} = \frac{{}^{\text{ケ}}4a_{n+1}}{a_n + {}^{\text{コ}}3} c_n$$

$$\text{また、} p=3 \text{ より } a_{n+1} = a_n + 3 \text{ であるから} \quad \frac{4a_{n+1}}{a_n+3} = \frac{4(a_n+3)}{a_n+3} = 4$$

よって、 $c_{n+1} = 4c_n$ より、数列 $\{c_n\}$ は公比が 1 より大きい等比数列である。^(サ) ②)

$$(3) \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 \text{ であるから、⑦の両辺を } b_n \text{ で割ると} \quad 2d_n - qd_{n+1} + 2u = 0$$

$$\text{変形すると} \quad qd_{n+1} = 2(d_n + u)$$

$$\text{よって} \quad d_{n+1} = \frac{{}^{\text{シ}}2}{q}(d_n + u)$$

数列 $\{d_n\}$ が^ス、公比が^セ 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は

$$0 < \frac{2}{q} < 1 \text{ かつ } u = 0$$

$$\text{すなわち} \quad q > {}^{\text{ソ}}2 \text{ かつ } u = {}^{\text{セ}}0$$

5

解説

(1) X の母平均は m ，母標準偏差は σ ，標本の大きさは 49 であるから，確率変数 $\bar{X}$ は，

平均 m ，標準偏差 $\frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7}$ の正規分布に近似的に従う。(ア ②，イ ⑦)

$W = 125000 \times \bar{X}$ とすると，確率変数 W は平均 $125000m$ ，標準偏差

$125000 \times \frac{\sigma}{7} = \frac{125000}{7} \sigma$ の正規分布に近似的に従う。(ウ ④，エ ⑤)

このとき， $M = 125000 \times m$ であるから， M に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$125000m - 1.96 \cdot \frac{125000}{7} \sigma \leq M \leq 125000m + 1.96 \cdot \frac{125000}{7} \sigma$$

$$125000 \left(16 - 1.96 \cdot \frac{2}{7} \right) \leq M \leq 125000 \left(16 + 1.96 \cdot \frac{2}{7} \right)$$

$$125000(16 - 0.56) \leq M \leq 125000(16 + 0.56)$$

$$1930000 \leq M \leq 2070000$$

よって オカキ $193 \times 10^4 \leq M \leq$ クケコ 207×10^4

(2) 正しいかどうか判断したい主張は

「今年の母平均 m が昨年とは異なる」

この主張に反する仮定として立てた主張は

「今年の母平均 m が昨年と同じである」

よって，帰無仮説は 「今年の母平均は 15 である」 (サ ②)

対立仮説は 「今年の母平均は 15 ではない」 (シ ⑥)

次に，帰無仮説が正しい，すなわち今年の母平均が 15 だとすると， $\bar{X}$ は平均 15，

標準偏差 $\frac{\sigma}{7} = \frac{2}{7}$ の正規分布に近似的に従う。(ス ⑦，セ ①)

花子さんたちの調査結果から求めた Z の値は $z = \frac{16 - 15}{\frac{2}{7}} = 3.5$

よって，標準正規分布において確率 $P(Z \leq -1.96)$ と確率 $P(Z \geq 1.96)$ の和が 0.05 であ

ることから，確率 $P(Z \leq -3.5)$ と確率 $P(Z \geq 3.5)$ の和は 0.05 よりも小さい。(ソ ①)

ゆえに，有意水準 5 % で今年の母平均 m は昨年と異なるといえる。(タ ⑩)

(1) 正五角形の内角の和は $180^\circ \times (5-2) = 540^\circ$ である

から $\angle A_1 B_1 C_1 = 540^\circ \div 5 = 108^\circ$

$\triangle B_1 C_1 A_1$ は $B_1 C_1 = B_1 A_1$ の二等辺三角形である

から $\angle A_1 C_1 B_1 = \angle C_1 A_1 B_1$

よって $\angle A_1 C_1 B_1 = (180^\circ - \angle A_1 B_1 C_1) \div 2$
 $= (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$

また $\angle C_1 A_1 A_2 = 108^\circ - (\angle O A_1 A_2 + \angle C_1 A_1 B_1)$
 $= 108^\circ - 36^\circ \times 2 = 36^\circ$

$\angle A_1 C_1 B_1 = \angle C_1 A_1 A_2$ より、錯角が等しいから、

$\overrightarrow{A_1 A_2}$ と $\overrightarrow{B_1 C_1}$ は平行である。

ゆえに、 $\overrightarrow{A_1 A_2} = {}^r a \overrightarrow{B_1 C_1}$ であるから

$$\overrightarrow{B_1 C_1} = \frac{1}{a} \overrightarrow{A_1 A_2} = \frac{1}{a} (\overrightarrow{O A_2} - \overrightarrow{O A_1})$$

また、 $\overrightarrow{O A_1}$ と $\overrightarrow{A_2 B_1}$ は平行で、さらに、 $\overrightarrow{O A_2}$ と $\overrightarrow{A_1 C_1}$ も平行であることから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_1 C_1} &= \overrightarrow{B_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 O} + \overrightarrow{O A_1} + \overrightarrow{A_1 C_1} \\ &= -a \overrightarrow{O A_1} - \overrightarrow{O A_2} + \overrightarrow{O A_1} + a \overrightarrow{O A_2} \\ &= (1 - a) (\overrightarrow{O A_2} - \overrightarrow{O A_1}) \end{aligned}$$

したがって $\frac{1}{a} = a - 1$ ゆえに $a^2 - a - 1 = 0$

$a > 0$ であるから $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(2) 面 $O A_1 B_1 C_1 A_2$ に着目する。

$\overrightarrow{O A_1}$ と $\overrightarrow{A_2 B_1}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{O B_1} = \overrightarrow{O A_2} + \overrightarrow{A_2 B_1} = \overrightarrow{O A_2} + a \overrightarrow{O A_1}$$

また $|\overrightarrow{O A_2} - \overrightarrow{O A_1}|^2 = |\overrightarrow{A_1 A_2}|^2 = a^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{O A_2} - \overrightarrow{O A_1}|^2 &= |\overrightarrow{O A_1}|^2 - 2 \overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O A_2} + |\overrightarrow{O A_2}|^2 \\ &= 1^2 - 2 \overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O A_2} + 1^2 = 2 - 2 \overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O A_2} \end{aligned}$$

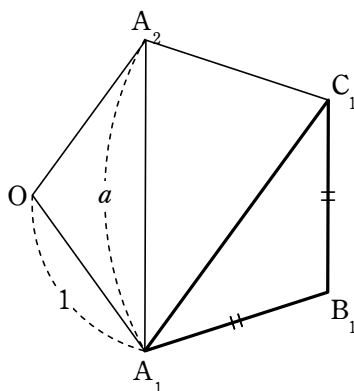
よって $2 - 2 \overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O A_2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ゆえに $\overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O A_2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$

次に、面 $O A_2 B_2 C_2 A_3$ に着目すると $\overrightarrow{O B_2} = \overrightarrow{O A_3} + a \overrightarrow{O A_2}$

さらに、 $\overrightarrow{O A_2} \cdot \overrightarrow{O A_3} = \overrightarrow{O A_3} \cdot \overrightarrow{O A_1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ が成り立つことがわかる。

ゆえに $\overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O B_2} = \overrightarrow{O A_1} \cdot (\overrightarrow{O A_3} + a \overrightarrow{O A_2}) = \overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O A_3} + a \overrightarrow{O A_1} \cdot \overrightarrow{O A_2}$
 $= \frac{1 - \sqrt{5}}{4} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \times \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ (※ ⑨)

$$\overrightarrow{O B_1} \cdot \overrightarrow{O B_2} = (\overrightarrow{O A_2} + a \overrightarrow{O A_1}) \cdot (\overrightarrow{O A_3} + a \overrightarrow{O A_2})$$



$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} + a |\overrightarrow{OA_2}|^2 + a \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3} + a^2 \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times 1^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\
&\quad + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\
&= 0 \quad (\text{〚 ⑩})
\end{aligned}$$

最後に、面 $A_2C_1DEB_2$ に着目する。

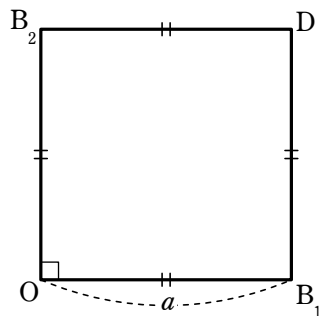
$\overrightarrow{B_2D} = a\overrightarrow{A_2C_1} = \overrightarrow{OB_1}$ であるから、四角形 OB_1DB_2 は平行四辺形である。

また、 $\overrightarrow{OB_1} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB_2} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} = 0$ であるから

$$\angle B_1OB_2 = 90^\circ$$

さらに、四角形 OB_1DB_2 の辺の長さは、すべて a である。

したがって、四角形 OB_1DB_2 は正方形である。(〚 ⑩)



【参考】 (2) の内積の値を求める問題は、文字 a を用いると計算ミスを防ぎやすい。

(1) から $\frac{1}{a} = a - 1$ すなわち $a^2 = a + 1$ が成り立つ。

$$|\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}|^2 = a^2 = a + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$2 - 2\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = a + 1$ から

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = \frac{1-a}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_1} = \frac{1-a}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} &= \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3} + a \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} \\
&= \frac{1-a}{2} + a \times \frac{1-a}{2} = -\frac{a^2-1}{2} = -\frac{(a+1)-1}{2} \\
&= -\frac{a}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad (\text{〚 ⑩})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} &= \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} + a |\overrightarrow{OA_2}|^2 + a \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3} + a^2 \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} \\
&= \frac{1-a}{2} + a \times 1^2 + a \times \frac{1-a}{2} + a^2 \times \frac{1-a}{2} \\
&= \frac{1-a}{2} \times (1+a+a^2) + a = \frac{1-a}{2} \times \{1+a+(a+1)\} + a \\
&= \frac{1-a}{2} \times (2a+2) + a \\
&= -a^2 + a + 1 = -(a+1) + a + 1 = 0 \quad (\text{〚 ⑩})
\end{aligned}$$