

第12章 2次関数 例題

1

解説

- ① 正方形の周の長さは、 $x \times 4 = 4x$ より $4x$ cm
よって $y = 4x$
- ② 縦の長さは $2x$ cm であるから、 $2x \times x = 2x^2$
より、長方形の面積は $2x^2$ cm²
よって $y = 2x^2$
- ③ 円周の長さは、 $2\pi \times x = 2\pi x$ より $2\pi x$ cm
よって $y = 2\pi x$

2

解説

- (1) y は x^2 に比例するから、 a を定数として、 $y = ax^2$ と表すことができる。
 $x = 2$ のとき $y = 12$ であるから
$$12 = a \times 2^2$$
$$12 = 4a$$
$$a = 3$$
よって $y = 3x^2$
- (2) y は x^2 に比例するから、 a を定数として、 $y = ax^2$ と表すことができる。
 $x = -4$ のとき $y = -8$ であるから
$$-8 = a \times (-4)^2$$
$$-8 = 16a$$
$$a = -\frac{1}{2}$$
よって $y = -\frac{1}{2}x^2$

3

解説

- (1) ① $x = 2$ のとき $y = 3 \times 2^2 = 12$ 、 $x = 5$ のとき $y = 3 \times 5^2 = 75$
よって、変化の割合は $\frac{75-12}{5-2} = \frac{63}{3} = 21$ 圈
- ② $x = -3$ のとき $y = 3 \times (-3)^2 = 27$ 、 $x = -1$ のとき $y = 3 \times (-1)^2 = 3$
よって、変化の割合は $\frac{3-27}{-1-(-3)} = \frac{-24}{2} = -12$ 圈
- (2) $x = p$ のとき $y = -5p^2$ 、 $x = p+3$ のとき $y = -5(p+3)^2$
よって、 x の値が p から $p+3$ まで増加するときの変化の割合は
$$\frac{-5(p+3)^2 - (-5p^2)}{(p+3) - p} = \frac{-30p - 45}{3} = -10p - 15$$
これが15に等しいから $-10p - 15 = 15$
これを解いて $p = -3$ 圈

4

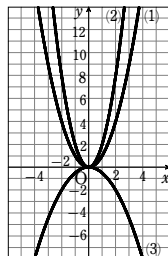
解説

3つの関数 $y = x^2$ 、 $y = 2x^2$ 、 $y = -\frac{1}{2}x^2$ について、

対応する x 、 y の値を計算して表をつくると、次のようになる。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$

上の表の x 、 y の値の組を座標とする点をとって、なめらかに結ぶと、右のようなグラフが得られる。圈



5

解説

- (1) ①、④、⑥
②、③、⑤
- (3) グラフの開きぐあいがい最も大きいものは、 $y = ax^2$ の a の絶対値が最も小さいものである。
よって ⑤
- (4) グラフの開きぐあいがい最も小さいものは、 $y = ax^2$ の a の絶対値が最も大きいものである。
よって ④
- (5) x 軸について対称となるものは、 $y = ax^2$ の a の絶対値が等しく、符号が異なるものである。
よって ②と⑥

6

解説

- (1) グラフより、 $y = ax^2$ に $x = 3$ 、 $y = 3$ を代入すると

$$3 = a \times 3^2$$

$$9a = 3$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } y = \frac{1}{3}x^2$$

- (2) A は直線 $y = 2x$ 上の点だから、その y 座標は $y = 2 \times 2 = 4$

さらに、A は関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点だから、 $x = 2$ 、 $y = 4$ を $y = ax^2$ に代入して
$$4 = a \times 2^2$$

$$\text{よって } a = 1$$

7

解説

放物線 $y = ax^2$ について $a \neq 0$

- (1) 放物線 $y = ax^2$ が点 A $(-1, 5)$ を通るとき

$$5 = a \times (-1)^2$$

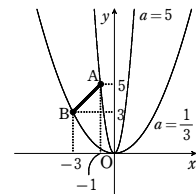
$$\text{よって } a = 5$$

放物線 $y = ax^2$ が点 B $(-3, 3)$ を通るとき

$$3 = a \times (-3)^2$$

$$\text{よって } a = \frac{1}{3}$$

したがって、求める a の値の範囲は $\frac{1}{3} \leq a \leq 5$



- (2) 放物線 $y = ax^2$ が点 C $(2, 2)$ を通るとき

$$2 = a \times 2^2$$

$$\text{よって } a = \frac{1}{2}$$

放物線 $y = ax^2$ が点 D $(4, -2)$ を通るとき

$$-2 = a \times 4^2$$

$$\text{よって } a = -\frac{1}{8}$$

したがって、求める a の値の範囲は

$$-\frac{1}{8} \leq a < 0, 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

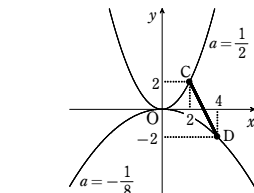
- (3) (1)、(2) より、求める a の値の範囲は

$$\frac{1}{3} \leq a \leq 5 \quad \text{と}$$

$$-\frac{1}{8} \leq a < 0, 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

の共通範囲である。

$$\text{よって } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$$



- (4) (1)、(2) より、求める a の値の範囲は、 $a \neq 0$ から

$$\frac{1}{3} \leq a \leq 5 \quad \text{と} \quad -\frac{1}{8} \leq a < 0, 0 < a \leq \frac{1}{2}$$

を除いた範囲である。

$$\text{よって } a < -\frac{1}{8}, 5 < a$$

8

解説

- (1) 点 B の x 座標は 3 である。

$$\text{よって、点 B の } y \text{ 座標は } y = \frac{1}{3} \times 3^2 = 3$$

すなわち、点 B の座標は $(3, 3)$

- (2) 点 C と点 B は、 y 軸について対称である。

よって、点 C の座標は $(-3, 3)$

- (3) $AB = 9 - 3 = 6$ 、 $BC = 3 - (-3) = 6$

$$\text{よって、}\triangle ABC \text{の面積は } \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

9

解説

点 A の x 座標は 2 であり、A は関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点であるから、
点 A の y 座標は $a \times 2^2 = 4a$
よって、点 A の座標は $(2, 4a)$
点 B の x 座標は 2 であり、B は関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上の点であるから、

点 B の y 座標は $-\frac{1}{3} \times 2^2 = -\frac{4}{3}$

よって、点 B の座標は $(2, -\frac{4}{3})$

点 C は点 B と y 軸について対称であるから、点 C の座標は $(-2, -\frac{4}{3})$

AB = BC が成り立つとき

$$4a - (-\frac{4}{3}) = 2 - (-2)$$

$$4a = \frac{8}{3}$$

よって $a = \frac{2}{3}$

10

解説

(1) 2 点 A, B は関数 $y = 2x^2$ のグラフ上にあるから、 $y = 2x^2$ に $x = -2, 1$ をそれぞれ代入すると

$$y = 2 \times (-2)^2 = 8$$

$$y = 2 \times 1^2 = 2$$

よって、A の座標は $(-2, 8)$ 、B の座標は $(1, 2)$

(2) 直線 ℓ の傾きは $\frac{2-8}{1-(-2)} = -2$

よって、 ℓ の式は $y = -2x + b$ とおける。

$y = -2x + b$ に $x = 1, y = 2$ を代入すると

$$2 = -2 + b$$

$$b = 4$$

したがって、 ℓ の式は $y = -2x + 4$

(3) 直線 ℓ と y 軸との交点を C とすると、C の座標は $(0, 4)$

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 1$$

$$= 6$$

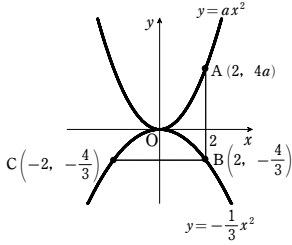
11

解説

点 A の x 座標を a とすると、3 点 A, B, D の座標は、それぞれ

$$(a, \frac{1}{2}a^2), (-a, \frac{1}{2}a^2), (a, -2a^2)$$

となる。



よって $AB = a - (-a) = 2a$

$$AD = \frac{1}{2}a^2 - (-2a^2) = \frac{5}{2}a^2$$

四角形 ABCD が正方形となると、 $AB = AD$ であるから $2a = \frac{5}{2}a^2$

ゆえに $a(5a - 4) = 0$

点 A の x 座標は正の数であるから $a > 0$

よって $a = \frac{4}{5}$ このとき $\frac{1}{2}a^2 = \frac{8}{25}$

したがって、点 A の座標は $(\frac{4}{5}, \frac{8}{25})$

12

解説

(1) 点 A の y 座標は $y = 3^2 = 9$

よって、点 A の座標は $(3, 9)$

直線 AC の傾きは -1 となるから、直線 AC の式は $y = -x + k$ とおける。

この直線が点 A(3, 9) を通るから $9 = -3 + k$

よって $k = 12$

したがって、求める直線の式は $y = -x + 12$

(2) 点 A の座標を (t, t^2) とおく。

正方形 ABCD の 1 辺の長さは 2 であるから、点 C の座標は $(t+2, t^2-2)$ となる。

この点が放物線 $y = \frac{1}{3}x^2$ 上にあるから

$$t^2 - 2 = \frac{1}{3}(t+2)^2$$

$$t^2 - 2t - 5 = 0$$

これを解いて $t = 1 \pm \sqrt{6}$

点 A の x 座標は正であるから $1 + \sqrt{6}$

13

解説

(1) 点 O を x 軸方向に a 、 y 軸方向に a^2 だけ移動した点が A である。

線分 OA と線分 BC は平行で長さが等しいから、点 B を x 軸方向に a 、 y 軸方向に a^2 だけ移動した点が C となる。

よって、点 C の座標は $(-1+a, 1+a^2)$

(2) 平行四辺形の面積を 2 等分する直線は、平行四辺形の 2 本の対角線の交点を通る。

2 本の対角線の交点は、線分 OC の中点であるから、その座標は

$$(\frac{-1+a}{2}, \frac{1+a^2}{2})$$

直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$ が、この点を通るから

$$\frac{1+a^2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{-1+a}{2} + \frac{9}{4}$$

$$2a^2 - a - 6 = 0$$

$$(a-2)(2a+3) = 0$$

$a > 0$ であるから $a = 2$ このとき $a^2 = 4$

したがって、点 A の座標は $(2, 4)$

$$\begin{aligned} (3) \quad \triangle OAB &= \frac{1}{2} \times (4+1) \times 3 - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \\ &= \frac{15}{2} - \frac{9}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

平行四辺形 OACB の面積は、 $\triangle OAB$ の面積の 2 倍であるから $3 \times 2 = 6$

14

解説

(1) $x = -1$ のとき $y = 2$ 、 $x = 2$ のとき $y = 8$

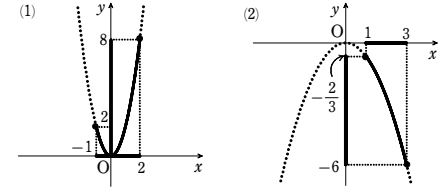
$y = 2x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$) のグラフは、図 (1) のようになる。

よって、求める値域は $0 \leq y \leq 8$ 圈

(2) $x = 1$ のとき $y = -\frac{2}{3}$ 、 $x = 3$ のとき $y = -6$

$y = -\frac{2}{3}x^2$ ($1 \leq x \leq 3$) のグラフは、図 (2) のようになる。

よって、求める値域は $-6 \leq y \leq -\frac{2}{3}$ 圈



15

解説

(1) y の値の範囲が 0 以上であるから

$$a > 0$$

$y = ax^2$ について

$$x = -2 \text{ のとき } y = 4a$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = a$$

グラフから、値域は $0 \leq y \leq 4a$

これが $0 \leq y \leq 8$ と等しいから

$$4a = 8$$

よって $a = 2$

(2) y の値の範囲が 0 以下であるから

$$a < 0$$

$y = ax^2$ について

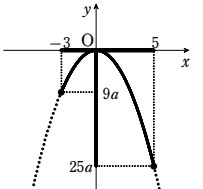
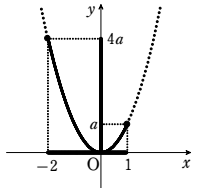
$$x = -3 \text{ のとき } y = 9a$$

$$x = 5 \text{ のとき } y = 25a$$

グラフから、値域は $25a \leq y \leq 0$

これが $-10 \leq y \leq 0$ と等しいから

$$25a = -10$$



よって $a = -\frac{2}{5}$

16

解説

(1) 定義域が $-3 \leq x \leq a$ であるから $-3 < a$

$$x = -3 \text{ のとき } y = -9$$

$$x = a \text{ のとき } y = -a^2$$

値域が $-16 \leq y \leq b$ であるから $-a^2 = -16$

$$a^2 = 16$$

$$a = \pm 4$$

$a > -3$ であるから, $a = -4$ はこの問題に適さない。

$a = 4$ は, この問題に適する。

定義域は $-3 \leq x \leq 4$ となり, 値域は $-16 \leq y \leq 0$ となるから $b = 0$

$$\text{答 } a = 4, b = 0$$

(2) 関数 $y = ax^2$ の値域が $b \leq y \leq 12$ であるから $a > 0$

$$x = -6 \text{ のとき } y = 36a$$

$$x = 5 \text{ のとき } y = 25a$$

$a > 0$ であるから $25a < 36a$

よって, $-6 \leq x \leq 5$ のとき $0 \leq y \leq 36a$

したがって $b = 0, 36a = 12$

$$a = \frac{1}{3} \quad \text{答 } a = \frac{1}{3}, b = 0$$

17

解説

$-1 \leq x \leq 2$ のとき, 関数 $y = x^2$ の値域は $0 \leq y \leq 4$

$a > 0$ であるから, 関数 $y = ax + b$ のグラフは右上がりの直線となる。

よって $x = -1$ のとき $y = 0$

$$x = 2 \text{ のとき } y = 4$$

となればよい。

$$\text{したがって } 0 = -a + b \quad \cdots \cdots ①$$

$$4 = 2a + b \quad \cdots \cdots ②$$

$$①, ② \text{ より } a = \frac{4}{3}, b = \frac{4}{3}$$

18

解説

$$(1) x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$x = -2, 3$$

$$x = -2 \text{ のとき } y = 4$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = 9$$

よって, 共有点の座標は $(-2, 4), (3, 9)$

$$(2) 2x^2 = 2x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = 2$$

よって, 共有点の座標は $(0, 0), (1, 2)$

$$(3) -\frac{1}{2}x^2 = -x - 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x = -2, 4$$

$$x = -2 \text{ のとき } y = -2$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = -8$$

よって, 共有点の座標は $(-2, -2), (4, -8)$

$$(4) x^2 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{このとき } y = 1$$

よって, 共有点の座標は $(1, 1)$

19

解説

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -x + 6$ の共有点の x 座標は, 2 次方程式 $x^2 = -x + 6$ の解である。

これを解くと $x^2 + x - 6 = 0$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x = -3, 2$$

$x = -3$ のとき, $y = 9$ であるから, 点 A の座標は $(-3, 9)$

また, 点 B の x 座標は, 方程式 $-x + 6 = 0$ を解いて $x = 6$

よって, 点 B の座標は $(6, 0)$

$$\text{したがって } \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27 \quad \text{答}$$

20

解説

$\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ は, 共通な辺 AB をもつ。

よって, $\triangle OAB = \triangle PAB$ となるのは, 2 つの三角形の底辺を AB としたときの高さが等しくなるときである。

ゆえに, 点 P は, 点 O を通り直線 AB に平行な直線と, 放物線との交点である。

直線 AB の傾きは 1 であるから, 点 O を通り直線 AB に平行な直線の式は $y = x$

よって, 点 P は, 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = x$ の交点である。

$$\frac{1}{2}x^2 = x \quad \text{より } x(x-2) = 0$$

点 P は点 O とは異なる点であるから $x \neq 0$

$$\text{よって } x = 2 \quad \text{このとき } y = 2$$

ゆえに, 点 P の座標は $(2, 2)$

21

解説

$$(1) y = \frac{1}{4}x^2 \text{ について, } x = -4 \text{ のとき } y = \frac{1}{4} \times (-4)^2 = 4$$

よって, 点 P の座標は $(-4, 4)$

$$y = x^2 \text{ について, } x = 1 \text{ のとき } y = 1$$

よって, 点 R の座標は $(1, 1)$

直線 ℓ の式を $y = ax + b$ とおくと, ℓ は 2 点 P, R を通るから

$$4 = -4a + b, 1 = a + b$$

$$\text{これを解くと } a = -\frac{3}{5}, b = \frac{8}{5}$$

$$\text{よって, 直線 } \ell \text{ の式は } y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$$

(2) 放物線 $y = x^2$ と直線 ℓ の交点 Q の x 座標は, 方程式 $x^2 = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$ の 1 以外の解

である。

$$\text{これを解くと } 5x^2 + 3x - 8 = 0$$

$$(x-1)(5x+8) = 0$$

$$\text{よって } x = 1, -\frac{8}{5}$$

$$\text{したがって, 点 Q の } x \text{ 座標は } -\frac{8}{5}$$

放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と直線 ℓ の交点 S の x 座標は, 方程式 $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$ の -4 以外の解である。

$$\text{これを解くと } 5x^2 + 12x - 32 = 0$$

$$(x+4)(5x-8) = 0$$

$$\text{よって } x = -4, \frac{8}{5}$$

$$\text{したがって, 点 S の } x \text{ 座標は } \frac{8}{5}$$

$\triangle OPQ$ と $\triangle OQR$ と $\triangle ORS$ は, 底辺を, それぞれ PQ, QR, RS とみると, 高さが等しいから

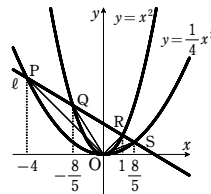
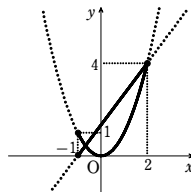
$$\triangle OPQ : \triangle OQR : \triangle ORS = PQ : QR : RS$$

ここで

$$PQ : QR : RS = \left(-\frac{8}{5} - (-4)\right) : \left(1 - \left(-\frac{8}{5}\right)\right) : \left(\frac{8}{5} - 1\right)$$

$$= \frac{12}{5} : \frac{13}{5} : \frac{3}{5} = 12 : 13 : 3$$

$$\text{よって } \triangle OPQ : \triangle OQR : \triangle ORS = 12 : 13 : 3$$



第12章 2次関数 例題演習

1

解説

- (1) $y=6x^2$ y は x^2 に比例する。
 (2) $y=\pi x^2$ y は x^2 に比例する。
 (3) $y=\frac{1}{3} \times x^2 \times 3x$ すなわち $y=x^3$
 y は x^2 に比例しない。
 (4) $y=2(x \times 0.5x + 0.5x \times 4x + 4x \times x)$
 すなわち $y=13x^2$
 y は x^2 に比例する。

2

解説

- (1) y は x^2 に比例するから、 a を定数として、 $y=ax^2$ とおくことができる。
 $x=2$, $y=20$ を代入すると $20=a \times 2^2$
 よって $a=5$
 したがって $y=5x^2$
 (2) y は x^2 に比例するから、 a を定数として、 $y=ax^2$ とおくことができる。
 $x=-3$, $y=3$ を代入すると $3=a \times (-3)^2$
 よって $a=\frac{1}{3}$
 したがって $y=\frac{1}{3}x^2$
 (3) y は x^2 に比例するから、 a を定数として、 $y=ax^2$ とおくことができる。
 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-1$ を代入すると $-1=a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$
 よって $a=-4$
 したがって $y=-4x^2$
 (4) y は x^2 に比例するから、 a を定数として、 $y=ax^2$ とおくことができる。
 $x=-\sqrt{3}$, $y=-\frac{15}{4}$ を代入すると $-\frac{15}{4}=a \times (-\sqrt{3})^2$
 よって $a=-\frac{5}{4}$
 したがって $y=-\frac{5}{4}x^2$
 (5) y は x^2 に比例するから、 a を定数として、 $y=ax^2$ とおくことができる。
 $x=5$, $y=75$ を代入すると $75=a \times 5^2$
 よって $a=3$
 したがって $y=3x^2$
 よって、 $x=-2$ のとき $y=3 \times (-2)^2=12$

3

解説

- (1) ① $x=3$ のとき $y=\frac{2}{3} \times 3^2=6$
 $x=6$ のとき $y=\frac{2}{3} \times 6^2=24$

よって、変化の割合は $\frac{24-6}{6-3}=\frac{18}{3}=6$

② $x=-2$ のとき $y=\frac{2}{3} \times (-2)^2=\frac{8}{3}$

$x=4$ のとき $y=\frac{2}{3} \times 4^2=\frac{32}{3}$

よって、変化の割合は $\frac{\frac{32}{3}-\frac{8}{3}}{4-(-2)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

③ $x=-3$ のとき $y=\frac{2}{3} \times (-3)^2=6$

$x=3$ のとき $y=6$

よって、変化の割合は $\frac{6-6}{3-(-3)}=0$

(2) ① $x=-3$ のとき $y=-2 \times (-3)^2=-18$

$x=k$ のとき $y=-2k^2$

よって、 x の値が -3 から k まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{-2k^2-(-18)}{k-(-3)}=\frac{-2(k^2-9)}{k+3}=\frac{-2(k+3)(k-3)}{k+3}$$

$$=-2(k-3)$$

これが -4 に等しいから $-2(k-3)=-4$

これを解いて $k=5$

これは $k>-3$ を満たす。 図 $k=5$

② $x=1$ のとき $y=a \times 1^2=a$

$x=4$ のとき $y=a \times 4^2=16a$

よって、 x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{16a-a}{4-1}=\frac{15a}{3}=5a$$

これが 3 に等しいから $5a=3$

これを解いて $a=\frac{3}{5}$

③ $x=p-2$ のとき $y=6(p-2)^2$

$x=p+4$ のとき $y=6(p+4)^2$

よって、 x の値が $p-2$ から $p+4$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{6(p+4)^2-6(p-2)^2}{(p+4)-(p-2)}=\frac{6[(p+4)^2-(p-2)^2]}{6}$$

$$=(p^2+8p+16)-(p^2-4p+4)$$

$$=12p+12$$

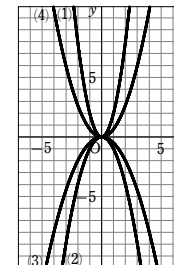
これが 36 に等しいから $12p+12=36$

これを解いて $p=2$

4

解説

(1) ~ (4) [図]



5

解説

- (1) グラフが上に凸となるものは ②, ④, ⑤
 (2) グラフが下に凸となるものは ①, ③, ⑥
 (3) グラフの開きぐあいが最も大きいものは、 $y=ax^2$ の a の絶対値が最も小さいものである。

$$-\frac{1}{4}=-0.25, \frac{2}{5}=0.4$$

よって ②

- (4) グラフの開きぐあいが最も小さいものは、 $y=ax^2$ の a の絶対値が最も大きいものである。

よって ④

- (5) x 軸について対称となるものは、 $y=ax^2$ の a の絶対値が等しく、符号が異なるものである。

よって ③と⑤

6

解説

(1) 求める式は $y = ax^2$ とおくことができる。

① 点 (2, 2) を通るから $2 = a \times 2^2$
よって $a = \frac{1}{2}$ すなわち $y = \frac{1}{2}x^2$

② 点 (1, 1) を通るから $1 = a \times 1^2$
よって $a = 1$ すなわち $y = x^2$

③ 点 (1, -1) を通るから $-1 = a \times 1^2$
よって $a = -1$ すなわち $y = -x^2$

④ 点 (1, -2) を通るから $-2 = a \times 1^2$
よって $a = -2$ すなわち $y = -2x^2$

(2) A は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点だから、その y 座標は

$$y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$$

さらに、A は直線 $y = ax$ 上の点だから、 $x = -2$ 、 $y = 2$ を $y = ax$ に代入して

$$2 = a \times (-2)$$

よって $a = -1$

7

解説

(1) 放物線 $y = ax^2$ が点 A (-1, 3) を通るとき $3 = a \times (-1)^2$

よって $a = 3$

放物線 $y = ax^2$ が点 B (-2, 2) を通るとき $2 = a \times (-2)^2$

よって $a = \frac{1}{2}$

したがって、求める a の値の範囲は $\frac{1}{2} \leq a \leq 3$

(2) 放物線 $y = ax^2$ が点 C (1, 1) を通るとき $1 = a \times 1^2$

よって $a = 1$

放物線 $y = ax^2$ が点 D (2, -1) を通るとき $-1 = a \times 2^2$

よって $a = -\frac{1}{4}$

したがって、求める a の値の範囲は $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ 、 $0 < a \leq 1$

(3) (1)、(2) より、求める a の値の範囲は $\frac{1}{2} \leq a \leq 3$ と $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ 、 $0 < a \leq 1$ の共通範囲である。

よって $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

(4) (1)、(2) より、求める a の値の範囲は、 $a \neq 0$ から $\frac{1}{2} \leq a \leq 3$ と $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ 、 $0 < a \leq 1$ を除いた範囲である。

よって $a < -\frac{1}{4}$ 、 $3 < a$

8

解説

(1) ① 点 B の x 座標は -3 である。

よって、点 B の y 座標は $y = \frac{1}{3} \times (-3)^2 = 3$

したがって、点 B の座標は (-3, 3)

② 点 C と点 B は、y 軸について対称である。

よって、点 C の座標は (3, 3)

③ $AB = 9 - 3 = 6$ 、 $BC = 3 - (-3) = 6$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

(2) ① 点 B の x 座標は 2 である。

よって、点 B の y 座標は $y = 2^2 = 4$

したがって、点 B の座標は (2, 4)

② 点 C と点 B は、y 軸について対称である。

よって、点 C の座標は (-2, 4)

③ $AB = 4 - (-2) = 6$ 、 $BC = 2 - (-2) = 4$

よって、 $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

9

解説

点 A は関数 $y = x^2$ のグラフ上にあるから、その座標は (t, t^2) [$t > 0$] と表せる。

また、AB は y 軸に平行で、点 B が関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$

のグラフ上にあるから、その座標は $(t, -\frac{1}{2}t^2)$

よって $AB = t^2 - (-\frac{1}{2}t^2) = \frac{3}{2}t^2$

BC は x 軸に平行で、点 C は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあるから、点 B と点 C は y 軸について対称である。

よって、点 C の x 座標は $-t$ $BC = t - (-t) = 2t$

$AB = BC$ であるから $\frac{3}{2}t^2 = 2t$

よって $t(3t - 4) = 0$

$t > 0$ であるから $t = \frac{4}{3}$

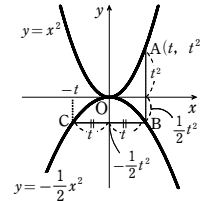
したがって、A の座標は $(\frac{4}{3}, \frac{16}{9})$ 図

10

解説

(1) 2 点 A、B は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあるから、 $y = \frac{1}{3}x^2$ に $x = -3$ 、6 をそれぞれ代入すると

$$y = \frac{1}{3} \times (-3)^2 = 3$$



$$y = \frac{1}{3} \times 6^2 = 12$$

よって、A の座標は (-3, 3)、B の座標は (6, 12)

直線 ℓ の傾きは $\frac{12 - 3}{6 - (-3)} = 1$

よって、 ℓ の式は $y = x + b$ とおける。

$y = x + b$ に $x = -3$ 、 $y = 3$ を代入すると

$$3 = -3 + b$$

$$b = 6$$

したがって、 ℓ の式は $y = x + 6$

(2) 直線 ℓ と y 軸との交点を C とすると、C の座標は (0, 6)

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \times 6$$

$$= 27$$

11

解説

点 A の x 座標を a とすると、3 点 A、B、D の座標は、それぞれ

$$\left(a, \frac{1}{3}a^2\right), \left(-a, \frac{1}{3}a^2\right), (a, -3a^2)$$

となる。

よって $AB = a - (-a) = 2a$

$$AD = \frac{1}{3}a^2 - (-3a^2) = \frac{10}{3}a^2$$

四角形 ABCD が正方形となると、 $AB = AD$ であるから

$$2a = \frac{10}{3}a^2$$

$$a(5a - 3) = 0$$

点 A の x 座標は正であるから $a = \frac{3}{5}$

このとき $\frac{1}{3}a^2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{25}$

したがって、点 A の座標は $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{25}\right)$

12

解説

- (1) 点 A の y 座標は $y=4^2=16$

よって、点 A の座標は (4, 16)

直線 AC の傾きは -1 となるから、直線 AC の式は $y=-x+k$ とおける。

この直線が点 (4, 16) を通るから $16=-4+k$

よって $k=20$

したがって、直線 AC の式は $y=-x+20$

- (2) 点 A の座標は (t, t^2) とおける。

正方形 ABCD の 1 辺の長さは 2 であるから、点 C の座標は $(t+2, t^2-2)$ となる。

この点が放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるから

$$t^2-2=\frac{1}{2}(t+2)^2$$

$$t^2-4t-8=0$$

$$\text{これを解いて } t=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-8)}}{1}=2\pm2\sqrt{3}$$

点 A の x 座標は正の数であるから $2+2\sqrt{3}$

13

解説

- (1) 点 O を x 軸方向に a 、 y 軸方向に a^2 だけ移動した点が A である。

線分 OA と線分 BC は平行で長さが等しいから、点 B を x 軸方向に a 、 y 軸方向に a^2 だけ移動した点が C となる。

よって、点 C の座標は $(-1+a, 1+a^2)$

- (2) 平行四辺形の面積を 2 等分する直線は、平行四辺形の 2 本の対角線の交点を通る。

2 本の対角線の交点は、線分 OC の中点であるから、その座標は

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{1+a^2}{2}\right)$$

直線 $y=4x+\frac{1}{2}$ が、点 $\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{1+a^2}{2}\right)$ を通るから

$$\frac{1+a^2}{2}=4\times\frac{-1+a}{2}+\frac{1}{2}$$

$$a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0$$

よって $a=2$

このとき $a^2=2^2=4$

したがって、点 A の座標は (2, 4)

- (3) まず、 $\triangle OAB$ の面積を求める。

$\triangle OAB$ の面積は、台形の面積から 2 つの三角形の面積をひけばよいから

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times(1+4)\times3-\left(\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times2\times4\right)$$

$$=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=3$$

平行四辺形 OACB の面積は、 $\triangle OAB$ の面積の 2 倍であるから $3\times2=6$

14

解説

- (1) 関数 $y=2x^2$ のグラフは、右の図のようになる。

$$\textcircled{1} \quad x=1 \text{ のとき } y=2$$

$$x=2 \text{ のとき } y=8$$

よって、求める値域は $2\leq y\leq 8$

$$\textcircled{2} \quad x=-1 \text{ のとき } y=2$$

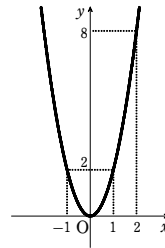
$$x=2 \text{ のとき } y=8$$

よって、求める値域は $0\leq y\leq 8$

$$\textcircled{3} \quad x=-1 \text{ のとき } y=2$$

$$x=1 \text{ のとき } y=2$$

よって、求める値域は $0\leq y\leq 2$



- (2) 関数 $y=-\frac{2}{3}x^2$ のグラフは、右の図のよう

なる。

$$\textcircled{1} \quad x=0 \text{ のとき } y=0$$

$$x=3 \text{ のとき } y=-6$$

よって、求める値域は $-6\leq y\leq 0$

$$\textcircled{2} \quad x=-\frac{3}{2} \text{ のとき } y=-\frac{3}{2}$$

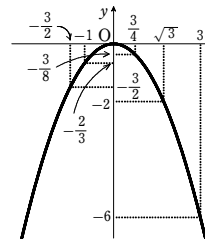
$$x=\frac{3}{4} \text{ のとき } y=-\frac{3}{8}$$

よって、求める値域は $-\frac{3}{2}\leq y\leq 0$

$$\textcircled{3} \quad x=-1 \text{ のとき } y=-\frac{2}{3}$$

$$x=\sqrt{3} \text{ のとき } y=-2$$

よって、求める値域は $-2\leq y\leq 0$



15

解説

- (1) 関数 $y=ax^2$ の値域が $0\leq y\leq 2$ であるから $a>0$

$$x=-1 \text{ のとき } y=a$$

$$x=2 \text{ のとき } y=4a$$

$a>0$ であるから $a<4a$

よって、 $-1\leq x\leq 2$ のとき $0\leq y\leq 4a$

したがって $4a=2$

$$a=\frac{1}{2}$$

- (2) 関数 $y=ax^2$ の値域が $-12\leq y\leq 0$ であるから $a<0$

$$x=-3 \text{ のとき } y=9a$$

$$x=4 \text{ のとき } y=16a$$

$a<0$ であるから $9a>16a$

よって、 $-3\leq x\leq 4$ のとき $16a\leq y\leq 0$

したがって $16a=-12$

$$a=-\frac{3}{4}$$

- (3) 関数 $y=ax^2$ の値域が $0\leq y\leq 6$ であるから $a>0$

$$x=-\sqrt{2} \text{ のとき } y=2a$$

$$x=\sqrt{3} \text{ のとき } y=3a$$

$a>0$ であるから $2a<3a$

よって、 $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{3}$ のとき $0\leq y\leq 3a$

したがって $3a=6$

$$a=2$$

16

解説

- (1) $x=-2$ のとき $y=-2\times(-2)^2=-8$

$$x=a \text{ のとき } y=-2a^2$$

$-8\neq-18$ であることから、 $a>2$ で、 $x=a$ のとき $y=-18$ となることがわかる。

ゆえに $-2a^2=-18$ $a>2$ であるから $a=3$

また $b=0$

図 $a=3, b=0$

- (2) 関数 $y=ax^2$ の値域は、0 以上のみ、あるいは 0 以下のみであり、正と負にまたがることはない。

この問題の値域は $b\leq y\leq 8$ であるから $a>0$

$$x=-4 \text{ のとき } y=a\times(-4)^2=16a$$

$$x=2 \text{ のとき } y=a\times2^2=4a$$

$a>0$ であるから $16a>4a$ よって $16a=8$

ゆえに $a=\frac{1}{2}$ また $b=0$

図 $a=\frac{1}{2}, b=0$

17

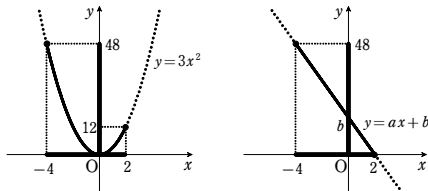
解説

- (1) $y=3x^2$ について $x=-4$ のとき $y=48$
 $x=2$ のとき $y=12$

グラフから、 $y=3x^2$ ($-4 \leq x \leq 2$) の値域は $0 \leq y \leq 48$
 $a < 0$ であるから、 $y=ax+b$ のグラフは右下がりの直線である

$$\begin{aligned} x=-4 \text{ のとき } y &= -4a+b \\ x=2 \text{ のとき } y &= 2a+b \end{aligned}$$

よって、条件から $-4a+b=48$, $2a+b=0$
 これを解いて $a=-8$, $b=16$



- (2) $y=6x+b$ のグラフは右上がりの直線である

$$\begin{aligned} x=-\frac{4}{3} \text{ のとき } y &= -8+b \\ x=4 \text{ のとき } y &= 24+b \end{aligned}$$

よって、 $y=6x+b$ ($-\frac{4}{3} \leq x \leq 4$) の値域は $-8+b \leq y \leq 24+b$

$y=ax^2$ について

$$\begin{aligned} x=-\frac{4}{3} \text{ のとき } y &= \frac{16}{9}a \\ x=4 \text{ のとき } y &= 16a \end{aligned}$$

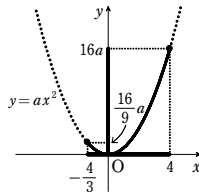
$a > 0$ であるから、 $y=ax^2$ ($-\frac{4}{3} \leq x \leq 4$) の

値域は $0 \leq y \leq 16a$

よって、条件から

$$-8+b=0, \quad 24+b=16a$$

これを解いて $a=2$, $b=8$



18

解説

- (1) $x^2=3x+4$
 $x^2-3x-4=0$
 $(x+1)(x-4)=0$
 したがって $x=-1, 4$
 $x=-1$ のとき $y=1$, $x=4$ のとき $y=16$
 よって、共有点の座標は $(-1, 1)$, $(4, 16)$

- (2) $2x^2=4x$
 $x^2-2x=0$
 $x(x-2)=0$

$x=0, 2$
 $x=0$ のとき $y=0$
 $x=2$ のとき $y=8$
 よって、共有点の座標は $(0, 0)$, $(2, 8)$

- (3) $-2x^2=-6x+4$
 $x^2-3x+2=0$
 $(x-1)(x-2)=0$
 したがって $x=1, 2$
 $x=1$ のとき $y=-2$, $x=2$ のとき $y=-8$
 よって、共有点の座標は $(1, -2)$, $(2, -8)$

- (4) $2x^2=-x+6$
 $2x^2+x-6=0$
 $(x+2)(2x-3)=0$
 したがって $x=-2, \frac{3}{2}$
 $x=-2$ のとき $y=8$, $x=\frac{3}{2}$ のとき $y=\frac{9}{2}$

よって、共有点の座標は $(-2, 8)$, $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

- (5) $-6x^2=-5x+1$
 $6x^2-5x+1=0$
 $(2x-1)(3x-1)=0$
 したがって $x=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
 $x=\frac{1}{2}$ のとき $y=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{1}{3}$ のとき $y=-\frac{2}{3}$

よって、共有点の座標は $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

- (6) $-x^2=-4x+4$
 $x^2-4x+4=0$
 $(x-2)^2=0$
 したがって $x=2$
 $x=2$ のとき $y=-4$
 よって、共有点の座標は $(2, -4)$

19

解説

点 C の y 座標は 6 であるから $C(0, 6)$

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=-x+6$ の共有点の x 座標は、2 次方程式 $x^2=-x+6$ の解である。

これを解くと $x^2+x-6=0$
 $(x+3)(x-2)=0$
 $x=-3, 2$

$x=-3$ のとき、 $y=9$ であるから、点 A の座標は $(-3, 9)$
 $x=2$ のとき、 $y=4$ であるから、点 D の座標は $(2, 4)$

- (1) $\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$

$$(2) \triangle ODC = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

$$\text{よって } \triangle OAD = \triangle OAC + \triangle ODC = 9 + 6 = 15$$

20

解説

$\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ は、共通な辺 AB をもつ。

$\triangle OAB = \triangle PAB$ となるのは、2 つの三角形の底辺を AB としたときの高さが等しいときである。

よって、点 P は、点 O を通り直線 AB に平行な直線と、放物線との交点である。
 直線 AB の傾きは 1 であるから、点 O を通り直線 AB に平行な直線の式は $y=x$

よって、点 P は、直線 $y=x$ と放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$ の交点のうち原点 O とは異なる点である。

$$\frac{1}{3}x^2 = x$$

$$x(x-3)=0$$

点 P は原点 O とは異なる点であるから

$$x=3$$

このとき $y=3$

したがって、点 P の座標は $(3, 3)$

21

解説

- (1) $x=2$ を $y=x^2$ に代入すると

$$y=2^2=4$$

よって、点 A の座標は (2, 4)

$$\text{直線 } \ell \text{ の傾きは } \frac{4-0}{2-(-2)}=1$$

したがって、 ℓ の式は $y=x+b$ とおける。

$x=2$, $y=4$ を $y=x+b$ に代入すると

$$4=2+b$$

$$b=2$$

よって、 ℓ の式は $y=x+2$

- (2) 点 E から右へ $2-(-2)=4$, 上へ 4 だけ動いた点が A である。

AE=AC であるから、点 C の座標は

$$(2+4, 4+4) \text{ すなわち } (6, 8)$$

$x=6$, $y=8$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$8=a \times 6^2$$

よって $a=\frac{2}{9}$

- (3) $y=\frac{2}{9}x^2$ を $y=x+2$ に代入すると

$$\frac{2}{9}x^2=x+2$$

$$2x^2-9x-18=0$$

$$x=\frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2-4 \times 2 \times (-18)}}{2 \times 2}=6, -\frac{3}{2}$$

よって、点 D の x 座標は $-\frac{3}{2}$

点 A を通り y 軸に平行な直線 m をひく。

2 点 C, D から m にそれぞれ垂線をひき, m との交点を C', D' とすると

$$CC'=6-2=4$$

$$DD'=2-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}$$

$\triangle ODA : \triangle OAC = DA : AC = DD' : CC'$ であるから、求める面積の比は

$$\frac{7}{2} : 4 = 7 : 8$$

1

解説

- (1) 求める式は $y=ax^2$ とおくことができる。

- ① グラフが点 $(-5, 10)$ を通るから、 $y=ax^2$ に $x=-5$, $y=10$ を代入すると

$$10=a \times (-5)^2$$

$$\text{よって } a=\frac{2}{5}$$

$$\text{したがって } y=\frac{2}{5}x^2$$

- ② グラフが点 $(2, 4)$ を通るから、 $y=ax^2$ に $x=2$, $y=4$ を代入すると

$$4=a \times 2^2$$

$$\text{よって } a=1$$

$$\text{したがって } y=x^2$$

- ③ グラフが点 $(3, -3)$ を通るから、 $y=ax^2$ に $x=3$, $y=-3$ を代入すると

$$-3=a \times 3^2$$

$$\text{よって } a=-\frac{1}{3}$$

$$\text{したがって } y=-\frac{1}{3}x^2$$

- (2) $y=\frac{2}{5}x^2$ に $x=-6$ を代入すると $y=\frac{2}{5} \times (-6)^2=\frac{72}{5}$

- (3) $y=x^2$ に $x=3$ を代入すると $y=3^2=9$

- (4) $y=-\frac{1}{3}x^2$ に $x=5$ を代入すると $y=-\frac{1}{3} \times 5^2=-\frac{25}{3}$

2 [三重]

解説

放物線 $y=-x^2$, $y=2x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$,

$y=-\frac{1}{4}x^2$ において、 x 座標が 1 である点を

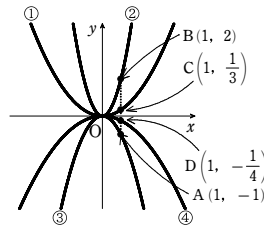
それぞれ A, B, C, D とすると

$$A(1, -1), B(1, 2),$$

$$C\left(1, \frac{1}{3}\right), D\left(1, -\frac{1}{4}\right)$$

A, B, C, D の位置関係は右の図のように

なるから、放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$ は ①



3 [奈良県]

解説

ア 正しい。

イ y 軸について対称な曲線であるから、正しくない。

ウ 正しい。

エ 正しい。

オ a の値の絶対値が大きいほど、グラフの開き方は小さいから、正しくない。

4

解説

- (1) $x=-3$ のとき $y=18$, $x=2$ のとき $y=8$

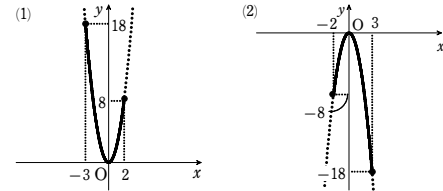
$y=2x^2$ ($-3 \leq x \leq 2$) のグラフは、図 (1) のようになる。

よって、求める値域は $0 \leq y \leq 18$

- (2) $x=-2$ のとき $y=-8$, $x=3$ のとき $y=-18$

$y=-2x^2$ ($-2 \leq x \leq 3$) のグラフは、図 (2) のようになる。

よって、求める値域は $-18 \leq y \leq 0$



- (3) $x=-1$ のとき $y=\frac{1}{4}$, $x=\frac{8}{3}$ のとき $y=\frac{16}{9}$

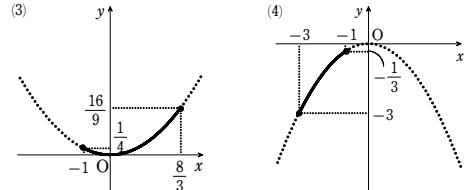
$y=\frac{1}{4}x^2$ ($-1 \leq x \leq \frac{8}{3}$) のグラフは、図 (3) のようになる。

よって、求める値域は $0 \leq y \leq \frac{16}{9}$

- (4) $x=-3$ のとき $y=-3$, $x=-1$ のとき $y=-\frac{1}{3}$

$y=-\frac{1}{3}x^2$ ($-3 \leq x \leq -1$) のグラフは、図 (4) のようになる。

よって、求める値域は $-3 \leq y \leq -\frac{1}{3}$



5

解説

(1) $y = -4x^2$ について

$$x = a \text{ のとき } y = -4a^2$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = -16$$

$-16 \leq -36$ であるから、 $a < -2$ で $x = a$ のとき $y = -36$ となる。

$$\text{よって } -4a^2 = -36$$

$$\text{したがって } a^2 = 9$$

$$a < -2 \text{ であるから } a = -3$$

$$\text{また、グラフから } b = 0$$

$$\text{図 } a = -3, b = 0$$

(2) 関数 $y = ax^2$ の値域は、 $a > 0$ のとき 0 以上、 $a < 0$ のとき 0 以下となり、正と負にまたがることはない。

この関数の値域は $b \leq y \leq 48$ であるから $a > 0$

$y = ax^2$ について

$$x = -3 \text{ のとき } y = 9a$$

$$x = 8 \text{ のとき } y = 64a$$

グラフから、値域は $0 \leq y \leq 64a$

これが $b \leq y \leq 48$ と等しいから

$$0 = b, 64a = 48$$

$$\text{よって } a = \frac{3}{4}, b = 0$$

6

解説

(1) $x = p$ のとき $y = 3p^2$

$$x = p+2 \text{ のとき } y = 3(p+2)^2$$

よって、 x の値が p から $p+2$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{3(p+2)^2 - 3p^2}{(p+2) - p} = \frac{12p+12}{2} = 6p+6$$

$$\text{したがって } 6p+6 = 10$$

$$\text{これを解いて } p = \frac{2}{3}$$

(2) $x = t-1$ のとき $y = -4(t-1)^2$

$$x = t+3 \text{ のとき } y = -4(t+3)^2$$

よって、 x の値が $t-1$ から $t+3$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{-4(t+3)^2 - [-4(t-1)^2]}{(t+3) - (t-1)} = \frac{-4(8t+8)}{4} = -8t-8$$

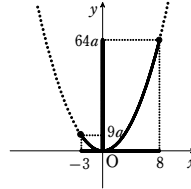
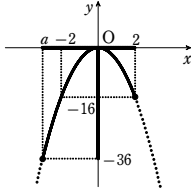
$$\text{したがって } -8t-8 = 16$$

$$\text{これを解いて } t = -3$$

(3) $x = -k$ のとき $y = -\frac{2}{5} \times (-k)^2 = -\frac{2}{5}k^2$

$$x = 2k \text{ のとき } y = -\frac{2}{5} \times (2k)^2 = -\frac{8}{5}k^2$$

よって、 x の値が $-k$ から $2k$ まで増加するときの変化の割合は



$$\frac{\left(-\frac{8}{5}k^2\right) - \left(-\frac{2}{5}k^2\right)}{2k - (-k)} = \frac{-\frac{6}{5}k^2}{3k} = -\frac{2}{5}k$$

$$\text{したがって } -\frac{2}{5}k = -4$$

$$\text{これを解いて } k = 10$$

7

解説

(1) $y = x^2$ について

$$x = p-3 \text{ のとき } y = (p-3)^2$$

$$x = p+3 \text{ のとき } y = (p+3)^2$$

よって、 x の値が $p-3$ から $p+3$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{(p+3)^2 - (p-3)^2}{(p+3) - (p-3)} = \frac{12p}{6} = 2p$$

$$y = 6x+5 \text{ の変化の割合は、つねに } 6 \text{ であるから } 2p = 6$$

$$\text{これを解いて } p = 3$$

(2) $y = -\frac{2}{3}x^2$ について

$$x = t-1 \text{ のとき } y = -\frac{2}{3}(t-1)^2$$

$$x = t+7 \text{ のとき } y = -\frac{2}{3}(t+7)^2$$

よって、 x の値が $t-1$ から $t+7$ まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{\left\{-\frac{2}{3}(t+7)^2\right\} - \left\{-\frac{2}{3}(t-1)^2\right\}}{(t+7) - (t-1)} = -\frac{4}{3}t-4$$

$$y = -2x+3 \text{ の変化の割合は、つねに } -2 \text{ であるから } -\frac{4}{3}t-4 = -2$$

$$\text{これを解いて } t = -\frac{3}{2}$$

(3) $y = kx^2$ について

$$x = k-1 \text{ のとき } y = k(k-1)^2$$

$$x = k \text{ のとき } y = k \times k^2$$

よって、 x の値が $k-1$ から k まで増加するときの変化の割合は

$$\frac{(k \times k^2) - k(k-1)^2}{k - (k-1)} = \frac{k(2k-1)}{1} = 2k^2 - k$$

$$y = kx+5 \text{ の変化の割合は、つねに } k \text{ であるから}$$

$$2k^2 - k = k$$

$$k(k-1) = 0$$

$$k \neq 0 \text{ であるから } k = 1$$

8

解説

(1) 放物線 $y = ax^2$ が点 A (1, 6) を通るとき $6 = a \times 1^2$

$$\text{よって } a = 6$$

放物線 $y = ax^2$ が点 B (2, 6) を通るとき $6 = a \times 2^2$

$$\text{よって } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{したがって、求める } a \text{ の値の範囲は } \frac{3}{2} \leq a \leq 6 \text{ 図}$$

(2) 放物線 $y = ax^2$ が点 C (-2, 2) を通るとき $2 = a \times (-2)^2$

$$\text{よって } a = \frac{1}{2}$$

放物線 $y = ax^2$ が点 D (-1, 2) を通るとき $2 = a \times (-1)^2$

$$\text{よって } a = 2$$

$$\text{したがって、求める } a \text{ の値の範囲は } \frac{1}{2} \leq a \leq 2 \text{ 図}$$

(3) (1), (2) より、求める a の値の範囲は $\frac{3}{2} \leq a \leq 6$ と $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ の共通範囲である。

$$\text{よって } \frac{3}{2} \leq a \leq 2 \text{ 図}$$

(4) (1), (2) より、求める a の値の範囲は、 $a > 0$ から $\frac{3}{2} \leq a \leq 6$ と $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ を除いた範囲である。

$$\text{よって } 0 < a < \frac{1}{2}, 6 < a \text{ 図}$$

9

解説

(1) 点 A の x 座標は 3 であるから、 y 座標は

$$y = -\frac{1}{3} \times 3^2 = -3$$

(2) 点 B の x 座標は 3 であるから、 y 座標は

$$y = a \times 3^2 = 9a$$

$$\text{よって } AB = 9a - (-3) = 9a + 3$$

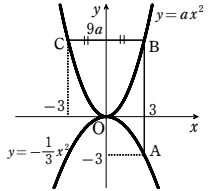
また、B と C は y 軸について対称であるから、点 C の x 座標は -3 である。

$$\text{よって } BC = 3 - (-3) = 6$$

$$AB : BC = 3 : 2 \text{ のとき } (9a+3) : 6 = 3 : 2$$

$$\text{したがって } 2(9a+3) = 18$$

$$\text{これを解いて } a = \frac{2}{3}$$



10

解説

点 A の x 座標は p であるから、A の y 座標は p^2

点 B の x 座標も p であるから、B の y 座標は $2p+4$

$$\text{よって } PA = p^2, PB = 2p+4$$

$$PA = \frac{1}{2}PB \text{ とすると } p^2 = \frac{1}{2}(2p+4)$$

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$\text{これを解くと } p = -1, 2$$

$$p > 0 \text{ であるから } p = 2$$

$$\text{したがって、P の座標は } (2, 0)$$

11

解説

2点A, Bは関数 $y = -x^2$ のグラフ上にあるから

Aのy座標は $y = -(-2)^2 = -4$, Bのy座標は $y = -3^2 = -9$

Aの座標は $(-2, -4)$, Bの座標は $(3, -9)$

2点A, Bを通る直線の式を求めると

$$y = -x - 6$$

12

解説

(1) 点Aは放物線 $y = ax^2$ 上の点であるから

$$8 = a \times (-4)^2$$

$$\text{よって } a = \frac{1}{2}$$

(2) 直線ABの式を $y = px + q$ とおくと

$$\begin{cases} 8 = -4p + q \\ 2 = 2p + q \end{cases}$$

これを解くと $p = -1, q = 4$

よって、直線ABの式は $y = -x + 4$

(3) OC=4であるから

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

(4) $\triangle BOC = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

よって $\triangle OAB = \triangle AOC + \triangle BOC = 8 + 4 = 12$

(5) 条件を満たす直線は、点Aと線分OCの中点を通る。

線分OCの中点の座標は $(0, 2)$

よって、求める直線の式は $y = rx + 2$ とおける。

この直線が、点Aを通るから

$$8 = -4r + 2$$

$$r = -\frac{3}{2}$$

したがって、求める直線の式は $y = -\frac{3}{2}x + 2$

13 [高田]

解説

(1) $y = 2$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$2 = \frac{1}{2}x^2$$

$$x = \pm 2$$

よって、点Aの座標は $(-2, 2)$

点Dの座標は $(2, 2)$

また、2点B, Cはy軸について対称であるから、点Cの座標は

$$(3, -6)$$

(2) AD=4, BC=6であるから、四角形ABCDの面積は

$$\frac{1}{2} \times (4+6) \times |2 - (-6)| = 40$$

(3) 点Dを通り、四角形ABCDの面積を2等分する直線と、線分BCとの交点をEとする。

$\triangle DEC$ の面積について

$$\frac{1}{2} \times EC \times 8 = 40 \times \frac{1}{2}$$

$$EC = 5$$

よって、点Eの座標は $(-2, -6)$

求める直線の式を $y = mx + n$ とおくと

$$2 = 2m + n$$

$$-6 = -2m + n$$

これを解くと $m = 2, n = -2$

したがって、求める式は $y = 2x - 2$

14

解説

(1) 放物線 $y = ax^2$ は点A $(-2, 8)$ を通るから $8 = a \times (-2)^2$

よって $a = 2$

(2) $y = 2x^2$ について

$$x = 1 \text{ のとき } y = 2 \times 1^2 = 2$$

よって、点Bの座標は $(1, 2)$

直線 ℓ の式を $y = mx + n$ とおくと、 ℓ は2点A, Bを通るから

$$8 = -2m + n, 2 = m + n$$

これを解くと $m = -2, n = 4$

したがって、直線 ℓ の式は $y = -2x + 4$

(3) 平行四辺形ABCDにおいては、点Aから点Bへの移動と、点Dから点Cへの移動は、同じ移動である。

点Aから点Bへの移動は、右に3, 下に6の移動である。

点Dのx座標は0であるから、点Cのx座標は3になる。

よって、点Cのy座標は $2 \times 3^2 = 18$

$$\text{図 } (3, 18)$$

(4) 点Dのy座標は、点Cのy座標より6だけ大きいから

$$18 + 6 = 24$$

よって、点Dの座標は $(0, 24)$

よって、点Dの座標は $(0, 24)$

15

解説

条件より AB//CO

よって、四角形OBACが平行四辺形となるのは、AB=CO となるときである。

$$\text{点Aのy座標は } y = a \times 3^2 = 9a$$

$$\text{点Bのy座標は } y = -\frac{1}{2} \times 3^2 = -\frac{9}{2}$$

$$\text{よって } AB = 9a - \left(-\frac{9}{2}\right) = 9a + \frac{9}{2}$$

$$\text{CO} = 6 \text{ であるから } 9a + \frac{9}{2} = 6$$

$$\text{これを解くと } a = \frac{1}{6} \quad \text{図}$$

16

解説

(1) $y = x^2$ について

$$x = 3 \text{ のとき } y = 9, \quad x = -1 \text{ のとき } y = 1$$

よって、点Aの座標は $(3, 9)$, 点Cの座標は $(-1, 1)$

2点A, Cを通る直線の式を $y = mx + n$ とおくと

$$9 = 3m + n, 1 = -m + n$$

これを解くと $m = 2, n = 3$

よって、求める直線の式は $y = 2x + 3$

(2) 平行四辺形OABCにおいては、点Oから点Cへの移動と、点Aから点Bへの移動は、同じ移動である。

点Oから点Cへの移動は、左に1, 上に1の移動である。

よって、点Bの座標は

$$(3-1, 9+1) \text{ すなわち } (2, 10)$$

放物線 $y = ax^2$ が点Bを通るから $10 = a \times 2^2$

$$\text{したがって } a = \frac{5}{2}$$

(3) 四角形OABCは平行四辺形であるから、その面積をSとすると

$$S = 2\triangle OAC$$

直線ACとy軸との交点をDとする。

(1) より、直線ACのy切片は3であるから $D(0, 3)$

したがって

$$\begin{aligned} \triangle OAC &= \triangle OAD + \triangle OCD \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6 \end{aligned}$$

よって $S = 2 \times 6 = 12$

17

解説

(1) 点Aのy座標は $4a^2$

よって、点Dのy座標は $4a^2$ となる。

点Dのx座標は $4a^2 = x^2$ を解いて $x = \pm 2a$

点Dのx座標は正であるから $x = 2a$

したがって、点Dの座標は $(2a, 4a^2)$

(2) 点Bのy座標は a^2

$$\text{よって } AB = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\text{また } AD = 2a - a = a$$

したがって、四角形ABCDの面積は

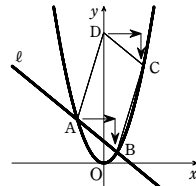
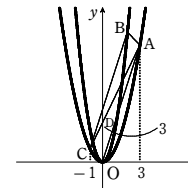
$$3a^2 \times a = 3a^3$$

(3) AB=AD となればよいから

$$3a^2 = a$$

$$3a^2 - a = 0$$

$$a(3a - 1) = 0$$



$$a > 0 \text{ であるから } a = \frac{1}{3}$$

18

解説

点 P は放物線 $y = x^2$ 上の点であるから、P の座標は (t, t^2) とおける。
ただし、 $0 < t < 1$ である。

このとき、 $PQ = t^2$ 、 $PR = 1 - t$ である。

四角形 PQAR が正方形になるとき、 $PQ = PR$ であるから

$$t^2 = 1 - t$$

$$\text{すなわち } t^2 + t - 1 = 0$$

$$\text{これを解くと } t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$0 < t < 1 \text{ であるから } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって、P の } x \text{ 座標は } \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

19

解説

(1) 放物線 $y = ax^2$ は点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を通るから $\frac{1}{2} = a \times (\frac{1}{2})^2$

$$\text{よって } a = 2$$

(2) 点 D の x 座標を t ($t > 0$) とする。

CD は y 軸に平行であるから、点 C の x 座標も t になる。

$$\text{よって } C(t, \frac{1}{2}t^2)$$

また、BC は x 軸に平行であるから、点 B の y 座標は、点 C の y 座標と等しく

$$\frac{1}{2}t^2$$

$$y = 2x^2 \text{ で } y = \frac{1}{2}t^2 \text{ とすると } \frac{1}{2}t^2 = 2x^2$$

$$\text{よって } x^2 = \frac{1}{4}t^2 \quad \text{これを解くと } x = \pm \frac{1}{2}t$$

$$\text{したがって、点 B の } x \text{ 座標は } \frac{1}{2}t \text{ であるから } B(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t^2)$$

$$\text{点 A の } x \text{ 座標は、点 B の } x \text{ 座標と等しく } \frac{1}{2}t \text{ で、} y \text{ 座標は } \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}t)^2 = \frac{1}{8}t^2$$

$$\text{よって } A(\frac{1}{2}t, \frac{1}{8}t^2)$$

四角形 ABCD は正方形であるから $BC = BA$

$$\text{すなわち } t - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^2$$

$$\text{これを解くと } \frac{1}{2}t = \frac{3}{8}t^2$$

$$3t^2 - 4t = 0$$

$$t(3t - 4) = 0$$

$$t > 0 \text{ であるから } t = \frac{4}{3} \quad \text{図 } \frac{4}{3}$$

$$(3) (2) \text{ から } C(\frac{4}{3}, \frac{8}{9}), A(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}), B(\frac{2}{3}, \frac{8}{9}), D(\frac{4}{3}, \frac{2}{9})$$

点 $(0, 1)$ を通る直線が正方形 ABCD と共有点をもつとき、傾き m が最大になるのは、直線が点 C を通るときである。

$$\text{このとき } m = \frac{\frac{8}{9} - 1}{\frac{4}{3} - 0} = -\frac{1}{9} \div \frac{4}{3} = -\frac{1}{12}$$

また、傾き m が最小になるのは、直線が点 A を通るときである。

$$\text{このとき } m = \frac{\frac{2}{9} - 1}{\frac{2}{3} - 0} = -\frac{7}{9} \div \frac{2}{3} = -\frac{7}{6}$$

$$\text{よって、求める } m \text{ の値の範囲は } -\frac{7}{6} \leq m \leq -\frac{1}{12}$$

20

解説

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = -x + 4$ の共有点の x 座標は、2 次方程式 $\frac{1}{2}x^2 = -x + 4$ の解である。

$$\text{これを解くと } x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$\text{よって } x = -4, 2$$

$$x = -4 \text{ のとき } y = 8, \quad x = 2 \text{ のとき } y = 2$$

したがって、A の座標は $(-4, 8)$ 、B の座標は $(2, 2)$

また、直線 $y = -x + 4$ の y 切片は 4 であるから、C の座標は $(0, 4)$

D の x 座標は、 $0 = -x + 4$ を解いて $x = 4$

よって、D の座標は $(4, 0)$

$$(1) \triangle ODC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

$$(2) \triangle OAC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

$$(3) \triangle OBC = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4 \text{ であるから}$$

$$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC = 8 + 4 = 12$$

21

解説

点 A の座標を求める。

$$A \text{ は } \textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ の共有点であるから、} -\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x \text{ を解いて } x = 0, -3$$

A は原点 O ではないから $x = -3$

$$\text{このとき } y = -\frac{9}{2}$$

$$\text{よって、A の座標は } (-3, -\frac{9}{2})$$

$$\text{また、点 B は } \textcircled{1} \text{ と } \textcircled{3} \text{ の共有点であるから、} -\frac{1}{2}x^2 = -x \text{ を解いて } x = 0, 2$$

B は原点 O ではないから $x = 2$

$$\text{このとき } y = -2$$

よって、B の座標は $(2, -2)$

2 点 A、B から x 軸に引いた垂線と x 軸との交点を、それぞれ C、D とする。

2 点 A、B の座標から、次のことがわかる。

$$OC = 3, \quad AC = \frac{9}{2}, \quad OD = 2, \quad BD = 2$$

$\triangle OAB$ の面積は

$$(\text{台形 } ABCD \text{ の面積}) - (\triangle OAC + \triangle OBD)$$

で求められるから

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{2} + 2\right) \times 5 - \left(\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) = \frac{65}{4} - \left(\frac{27}{4} + 2\right) = \frac{15}{2}$$

22 [広陵]

解説

(1) 点 A は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあるから、 $y = \frac{1}{3}x^2$ に $x = -3$ を代入すると、
 y 座標は

$$y = \frac{1}{3} \times (-3)^2 = 3$$

直線 ℓ の式を $y = -\frac{1}{3}x + b$ とおくと、点 A はこの直線上にあるから

$$3 = -\frac{1}{3} \times (-3) + b$$

$$b = 2$$

$$\text{よって、直線 } \ell \text{ の式は } y = -\frac{1}{3}x + 2$$

(2) 点 C の x 座標は $\frac{1}{3}x^2 = -\frac{1}{3}x + 2$ の解で表される。

$$x^2 + x - 6 = 0$$

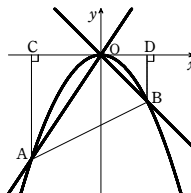
$$(x - 2)(x + 3) = 0$$

点 C の x 座標は正であるから $x = 2$

$$\text{よって } \triangle OAC = \triangle OAB + \triangle OCB$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2$$

$$= 5$$



23[城西大学附属川越]

解説

(1) 直線 ℓ の傾きは $\frac{-1-(-4)}{2-(-4)} = \frac{1}{2}$

よって、直線 ℓ の式は $y = \frac{1}{2}x + b$ と表すことができる。

$x=2$, $y=-1$ をこの式に代入すると

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{1}{2} \times 2 + b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

したがって、求める式は $y = \frac{1}{2}x - 2$

(2) $\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2$
 $= 6$

(3) 点 O を通り、直線 ℓ と平行な直線をひき、この直線と放物線 $y = -\frac{1}{4}x^2$ との交点

のうち原点でないものを P とする。

このとき、 $\triangle OAB = \triangle PAB$ となることから、この点 P の座標を求めればよい。

直線 OP の式は $y = \frac{1}{2}x$

$y = \frac{1}{2}x$ を $y = -\frac{1}{4}x^2$ に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= -\frac{1}{4}x^2 \\ x^2 + 2x &= 0 \\ x(x+2) &= 0 \\ x &= 0, -2 \end{aligned}$$

点 P は原点とは異なるから $x = -2$

$x = -2$ を $y = \frac{1}{2}x$ に代入すると

$$y = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

よって、点 P の座標は $(-2, -1)$

24[清真学園]

解説

(1) $x = -2$ を $y = x^2$ に代入すると $y = (-2)^2 = 4$

$$x = 3 \text{ を } y = x^2 \text{ に代入すると } y = 3^2 = 9$$

よって、点 A の座標は $(-2, 4)$ 、点 B の座標は $(3, 9)$

$$\text{直線 } \ell \text{ の傾きは } \frac{9-4}{3-(-2)} = 1$$

したがって、 ℓ の式は $y = x + b$ とおける。

$x = -2$, $y = 4$ を $y = x + b$ に代入すると

$$\begin{aligned} 4 &= -2 + b \\ b &= 6 \end{aligned}$$

よって、求める式は $y = x + 6$

(2) $\triangle OAB : \triangle OPA = 5 : 2$ より $AB : PA = 5 : 2 \dots\dots ①$

点 P の x 座標を t とすると、①より

$$\begin{aligned} \{3 - (-2)\} : \{-2 - t\} &= 5 : 2 \\ -10 - 5t &= 10 \\ t &= -4 \end{aligned}$$

$x = -4$ を $y = x + 6$ に代入すると

$$y = -4 + 6 = 2$$

よって、点 P の座標は $(-4, 2)$

$x = -4$, $y = 2$ を $y = ax^2$ に代入すると

$$2 = a \times (-4)^2$$

したがって $a = \frac{1}{8}$

(3) $y = \frac{1}{8}x^2$ を $y = x + 6$ に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}x^2 &= x + 6 \\ x^2 - 8x - 48 &= 0 \\ (x+4)(x-12) &= 0 \\ x &= -4, 12 \end{aligned}$$

よって、点 Q の x 座標は 12

$\triangle OAB : \triangle OPQ = AB : PQ$ であるから、求める面積の比は

$$\{3 - (-2)\} : \{12 - (-4)\} = 5 : 16$$

25[明治大学付属明治]

解説

(1) 点 B の座標は $(2, 1)$

BD : DP : PC = 1 : 3 : 4 より BP = PC

よって、点 C の座標は $(-2, 4a)$

また、BD : DP = 1 : 3 より、点 D の x 座標は $2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

よって、点 D の座標は $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}a)$

点 B, D, C の y 座標について、BD : BC = 1 : 8 であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{4}a - 1\right) : (4a - 1) &= 1 : 8 \\ 4a - 1 &= 18a - 8 \end{aligned}$$

したがって $a = \frac{1}{2}$

(2) 点 C の座標は $(-2, 2)$

$$\text{よって、直線 } \ell \text{ の傾きは } \frac{1-2}{2-(-2)} = -\frac{1}{4}$$

したがって、直線 ℓ の式は $y = -\frac{1}{4}x + b$ とおけるから

$$\begin{aligned} 2 &= -\frac{1}{2} + b \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって、求める式は $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

(3) $y = \frac{1}{4}x^2$ を $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ に代入すると

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$x^2 = -x + 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2, -3$$

点 A の x 座標は -3 であるから

$$AP : CP = 3 : 2$$

第12章 2次関数 レベルB

[1] [兵庫県]

解説

- (1) $x=3$, $y=3$ を $y=ax^2$ に代入すると

$$3=a \times 3^2$$

$$\text{よって } a=\frac{1}{3}$$

- (2) $y=bx^2$ のグラフは, x 軸を対称の軸として $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフと線対称であるから

$$b=-\frac{1}{3}$$

- (3) $y=cx^2$ について,

$$x=1 \text{ のとき } y=c \times 1^2=c$$

$$x=3 \text{ のとき } y=c \times 3^2=9c$$

よって, 変化の割合について

$$\frac{9c-c}{3-1}=2$$

$$4c=2$$

$$c=\frac{1}{2}$$

- (4) 比例定数が正の数であるのは

$$y=\frac{1}{3}x^2, y=\frac{1}{2}x^2, y=dx^2$$

である。

$\frac{1}{2} < d$ であるから, $y=dx^2$ の開きぐあいが一番小さい。

よって, $y=dx^2$ のグラフが ア

$$y=\frac{1}{2}x^2 \text{ のグラフが イ}$$

$$y=\frac{1}{3}x^2 \text{ のグラフが ウ}$$

である。

$y=-\frac{1}{3}x^2$ のグラフは, ウのグラフと x 軸を対称の軸として線対称であるから, オである。

$e < -\frac{1}{3}$ であるから, $y=ex^2$ の開きぐあいはオより小さい。

よって, $y=ex^2$ のグラフは エ

したがって, $y=cx^2$ のグラフは イ, $y=ex^2$ のグラフはエである。

[2]

解説

値域に 0 を含むから, 定義域も 0 を含む。

また, 値域が $-2 \leq y \leq 0$ であるから, $x=a$ か $x=a+3$ のどちらかで $y=-2$ となる。

- [1] $x=a$ で $y=-2$ となる場合

$$-2=-\frac{1}{2}a^2$$

$$\text{よって } a^2=4$$

$$\text{したがって } a=\pm 2$$

定義域を調べると

$$a=2 \text{ のとき, } 2 \leq x \leq 5 \text{ で適さない。}$$

$$a=-2 \text{ のとき, } -2 \leq x \leq 1 \text{ で適する。}$$

- [2] $x=a+3$ で $y=-2$ となる場合

$$-2=-\frac{1}{2}(a+3)^2$$

$$(a+3)^2=4$$

$$a+3=\pm 2$$

$$\text{よって } a=-1, -5$$

定義域を調べると

$$a=-1 \text{ のとき, } -1 \leq x \leq 2 \text{ で適する。}$$

$$a=-5 \text{ のとき, } -5 \leq x \leq -2 \text{ で適さない。}$$

したがって, 求める a の値は $a=-2, -1$

[3]

解説

$y=-2x+b$ のグラフは右下がりの直線で

$$x=-2 \text{ のとき } y=4+b$$

$$x=3 \text{ のとき } y=-6+b$$

$$\text{よって, } y=-2x+b \text{ } (-2 \leq x \leq 3) \text{ の値域は } -6+b \leq y \leq 4+b$$

$y=ax^2$ について $x=-2$ のとき $y=4a$

$$x=3 \text{ のとき } y=9a$$

- [1] $a>0$ のとき

$y=ax^2$ $(-2 \leq x \leq 3)$ の値域は

$$0 \leq y \leq 9a$$

よって, 条件から

$$-6+b=0, 4+b=9a$$

これを解いて

$$a=\frac{10}{9}, b=6$$

- [2] $a<0$ のとき

$y=ax^2$ $(-2 \leq x \leq 3)$ の値域は

$$9a \leq y \leq 0$$

よって, 条件から

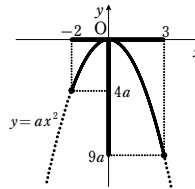
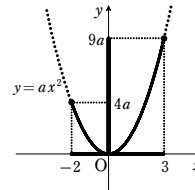
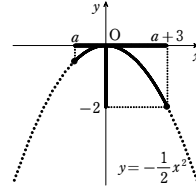
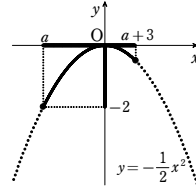
$$-6+b=9a, 4+b=0$$

これを解いて

$$a=-\frac{10}{9}, b=-4$$

したがって

$$a=\frac{10}{9}, b=6 \text{ または } a=-\frac{10}{9}, b=-4$$



[4]

解説

- (1) $a=-1$ のとき, x の定義域は

$$-3 \leq x \leq -1$$

$$x=-1 \text{ のとき, } y=12 \times (-1)^2=12$$

$$x=-3 \text{ のとき, } y=12 \times (-3)^2=108$$

$y=12x^2$ $(-3 \leq x \leq -1)$ のグラフは, 右の図のようになる。

したがって, y の最小値は 12, 最大値は 108

- (2) y の最小値が 0 になるのは, x の定義域に 0 を含むときで, 右の図のように, $a-2$ が 0 以下で, a が 0 以上であればよい。

$$\text{すなわち } a-2 \leq 0, a \geq 0$$

$$\text{よって } 0 \leq a \leq 2$$

- (3) $a \geq 1$ であるから $a-2 \geq -1$
 x の定義域に 0 を含む場合と含まない場合に分けて考える。

- [1] $a>2$ のとき

$y=12x^2$ $(a-2 \leq x \leq a)$ のグラフは右の図のようになる。

よって, $x=a$ で最大値 $12a^2$,

$x=a-2$ で最小値 $12(a-2)^2$ をとる。

よって, $12a^2 - 12(a-2)^2 = 36$ とおくと

$$12a^2 - 12a^2 + 48a - 48 = 36$$

$$48a = 84$$

$$a = \frac{7}{4}$$

これは, $a>2$ を満たさないから適さない。

- [2] $1 \leq a \leq 2$ のとき

$y=12x^2$ $(a-2 \leq x \leq a)$ のグラフは右の図のようになる。

よって, 最小値は 0 である。

また, $x=a$ で最大値 $12a^2$ をとる。

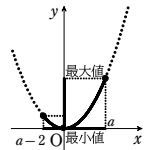
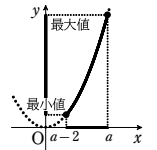
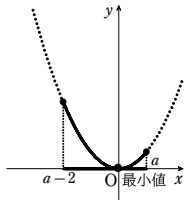
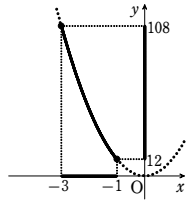
よって, $12a^2 - 0 = 36$ とおくと

$$a^2 = 3$$

$$a = \pm \sqrt{3}$$

$1 \leq a \leq 2$ であるから $a = \sqrt{3}$

したがって, 求める a の値は $a = \sqrt{3}$



5

解説

放物線と直線の共有点がただ1つになるためには、放物線の式と直線の式を連立方程式と考えて y を消去した x の2次方程式が

$$(ax+b)^2=0$$

の形になればよい。

2つの式から y を消去すると

$$x^2=8x+m$$

$$\text{よって } x^2-8x-m=0 \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$\text{一方 } (x-4)^2=x^2-8x+16 \text{ である。}$$

$$\text{すなわち } x^2-8x=(x-4)^2-16$$

これを利用して①の左辺を変形すると

$$(x-4)^2-16-m=0$$

$$\text{ゆえに、} -16-m=0 \text{ となればよい。}$$

$$\text{したがって } m=-16$$

【例解】 判別式の考えを使って、次のように解いてもよい。

2次方程式①の判別式を D とすると

$$D=(-8)^2-4\times 1\times (-m)=64+4m$$

$$\text{①の実数解がただ1つであるとき } D=0$$

$$\text{すなわち } 64+4m=0 \quad \text{これを解いて } m=-16$$

6 [滝川]

解説

(1) A, B は放物線 $y=ax^2$ 上にあるから、A の座標は $(4, 16a)$ 、B の座標は $(-2, 4a)$ である。

直線 AB の傾きについて

$$\frac{16a-4a}{4-(-2)}=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{4}$$

(2) 点 A の座標は $(4, 4)$ 、点 B の座標は $(-2, 1)$ であり、直線 AB の式は $y=\frac{1}{2}x+b$

とおける。

$$y=\frac{1}{2}x+b \text{ に } x=4, y=4 \text{ を代入すると}$$

$$4=\frac{1}{2}\times 4+b$$

$$b=2$$

$$\text{よって、直線 AB の式は } y=\frac{1}{2}x+2$$

(3) 直線 AB と y 軸の交点を C とすると $OC=2$

$$\text{よって } \triangle OAB=\triangle OAC+\triangle OBC$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 4+\frac{1}{2}\times 2\times 2$$

$$=6$$

7 [常磐大学]

解説

$$(1) \quad x=4 \text{ を } y=\frac{1}{2}x^2 \text{ に代入すると}$$

$$y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$$

$$\text{よって、点 B の座標は } (4, 8)$$

$$x=4 \text{ を } y=ax^2 \text{ に代入すると}$$

$$y=a\times 4^2=16a$$

$$\text{よって、点 C の座標は } (4, 16a)$$

$$BC=14 \text{ であるから}$$

$$8-16a=14$$

$$a=-\frac{3}{8}$$

$$(2) \quad x=-2 \text{ を } y=\frac{1}{2}x^2 \text{ に代入すると}$$

$$y=\frac{1}{2}\times (-2)^2=2$$

$$\text{よって、点 A の座標は } (-2, 2)$$

直線 AP が線分 BC の中点を通るとき、この直線は $\triangle ABC$ の面積を2等分する。

線分 BC の中点の座標は

$$\left(4, 8-\frac{14}{2}\right) \quad \text{すなわち } (4, 1)$$

直線 AP の式を $y=mx+n$ とおくと

$$2=-2m+n$$

$$1=4m+n$$

$$\text{これを解いて } m=-\frac{1}{6}, n=\frac{5}{3}$$

$$\text{したがって、直線 AP の式は } y=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}$$

この式に $y=0$ を代入すると

$$0=-\frac{1}{6}x+\frac{5}{3}$$

$$x=10$$

$$\text{よって、点 P の座標は } (10, 0)$$

8 [成蹊]

解説

(1) 点 A は関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあるから、 $y=ax^2$ に $x=-4$ 、 $y=12$ を代入すると

$$12=a\times (-4)^2$$

$$a=\frac{3}{4}$$

(2) 点 B は関数 $y=\frac{3}{4}x^2$ のグラフ上にあるから、 $y=\frac{3}{4}x^2$ に $x=1$ を代入すると

$$y=\frac{3}{4}$$

$$\text{よって、点 B の座標は } \left(1, \frac{3}{4}\right)$$

直線 AB の傾きは

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}-12\right)\div(1-(-4))&=-\frac{45}{4}\div 5 \\ &=-\frac{9}{4} \end{aligned}$$

点 C の y 座標を c とすると、直線 AB の式は $y=-\frac{9}{4}x+c$ とおける。

この式に $x=-4$ 、 $y=12$ を代入すると

$$12=9+c$$

$$c=3$$

$$\text{よって、点 C の座標は } (0, 3)$$

(3) $\triangle OAB=\triangle OAC+\triangle OBC$

$$=\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 3\times 1$$

$$=\frac{15}{2}$$

(4) 直線 OA の傾きは $-\frac{12}{4}=-3$ であるから、直線 OA の式は $y=-3x$

求める直線と OA の交点 D の座標を $(d, -3d)$ とする。

$$\triangle OBC=\frac{3}{2} \text{ であるから}$$

$$\triangle OCD=\frac{15}{2}\times \frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

$$\text{よって } \frac{1}{2}\times 3\times (-d)=\frac{9}{4}$$

$$-d=\frac{9}{4}\times \frac{2}{3}$$

$$d=-\frac{3}{2}$$

$$\text{点 D の座標は } \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$\text{直線 CD の傾きは } \left(3-\frac{9}{2}\right)\div\left\{0-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}=-1$$

$$\text{したがって、直線 CD の式は } y=-x+3$$

9 [桃山学院]

解説

- (1) $y = x^2$ を $y = 2x + 8$ に代入すると

$$\begin{aligned}x^2 &= 2x + 8 \\x^2 - 2x - 8 &= 0 \\(x - 4)(x + 2) &= 0 \\x &= -2, 4\end{aligned}$$

よって、点 A の x 座標は -2 、点 B の x 座標は 4 である。

直線 $y = 2x + 8$ と y 軸との交点を C とすると

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$$

したがって $\triangle AOB = 8 + 16 = 24$

- (2) 点 A の座標は $(-2, 4)$ 、点 B の座標は $(4, 16)$ である。

直線 OB の式は $y = \frac{16}{4}x$ すなわち $y = 4x$

$$\begin{aligned}x = 2 \text{ を } y = 4x \text{ に代入すると} \\y &= 4 \times 2 = 8\end{aligned}$$

よって、点 Q の座標は $(2, 8)$

$x = 2$ を $y = 2x + 8$ に代入すると

$$y = 2 \times 2 + 8 = 12$$

よって、点 P の座標は $(2, 12)$

したがって $\triangle PQB = \frac{1}{2} \times (12 - 8) \times (4 - 2) = 4$

- (3) 求める点 P の x 座標を t とする。

点 P の y 座標は $2t + 8$ 、点 Q の y 座標は $4t$ であるから

$$PQ = 2t + 8 - 4t = 8 - 2t$$

よって、 $\triangle PBQ$ の面積について

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times (8 - 2t) \times (4 - t) &= 24 \div 2 \\(t - 4)^2 &= 12 \\t - 4 &= \pm 2\sqrt{3} \\t &= 4 \pm 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$0 < t < 4$ であるから $t = 4 - 2\sqrt{3}$

したがって、求める点 P の x 座標は $4 - 2\sqrt{3}$

10 [東北学院]

解説

- (1) 点 A、B の座標は、連立方程式 $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}$ の解であるから、これを解くと

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x^2 &= x + 6 \\x^2 - 3x - 18 &= 0 \\(x + 3)(x - 6) &= 0 \\x &= -3, 6 \\x = -3 \text{ のとき} \quad y &= -3 + 6 = 3\end{aligned}$$

$$x = 6 \text{ のとき} \quad y = 6 + 6 = 12$$

よって、点 A の座標は $(-3, 3)$ 、点 B の座標は $(6, 12)$

- (2) $\triangle AOB = \triangle APB$ となるとき、 $AB \parallel OP$ である。

直線 AB の傾きは 1 であるから、直線 OP の式は $y = x$

$$\begin{aligned}\text{連立方程式} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = x \end{cases} \text{を解くと} \\ \frac{1}{3}x^2 &= x \\x^2 - 3x &= 0 \\x(x - 3) &= 0 \\x &= 0, 3\end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0, \quad x = 3 \text{ のとき } y = 3$$

点 P は原点とは異なる点であるから、点 P の座標は $(3, 3)$

- (3) 四角形 OPBA の面積は

$$\begin{aligned}\triangle OAP + \triangle BAP &= \frac{1}{2} \times [3 - (-3)] \times 3 + \frac{1}{2} \times [3 - (-3)] \times (12 - 3) \\&= 9 + 27 \\&= 36\end{aligned}$$

求める直線と直線 AB の交点を Q とすると

$$\begin{aligned}\triangle QAP &= \frac{36}{2} - \triangle OAP = 18 - 9 \\&= 9\end{aligned}$$

点 Q の座標を $(q, q + 6)$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times 6 \times [(q + 6) - 3] &= 9 \\3(q + 3) &= 9 \\q + 3 &= 3 \\q &= 0\end{aligned}$$

よって、点 Q の座標は $(0, 6)$ であるから、直線 PQ の式は

$$y = \frac{3 - 6}{3 - 0}x + 6$$

すなわち $y = -x + 6$

11 [茨城県]

解説

- (1) $a \times 2^2 = 4a$ 、 $-\frac{1}{2} \times (-2)^2 = -2$ より、点 A、B の座標はそれぞれ A $(2, 4a)$ 、

B $(-2, -2)$ である。

よって、直線 AB の傾きは $\frac{4a - (-2)}{2 - (-2)} = a + \frac{1}{2}$

また、点 C、D の座標はそれぞれ C $(4, 0)$ 、D $(8, 12)$ であるから、直線 CD の傾きは

$$\frac{12 - 0}{8 - 4} = 3$$

四角形 ABCD は平行四辺形であるから $AB \parallel DC$

$$\begin{aligned}\text{よって} \quad a + \frac{1}{2} &= 3 \\a &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

- (2) 平行四辺形の面積を 2 等分する直線は、平行四辺形の 2 本の対角線の交点を通る。
2 本の対角線の交点は、線分 AC の中点である。

その座標を F とすると、A、C の座標はそれぞれ $(2, 10)$ 、 $(4, 0)$ であるから、
 $\frac{2+4}{2} = 3$ 、 $\frac{10+0}{2} = 5$ より、F の座標は $(3, 5)$ となる。

求める直線の式は、2 点 E、F を通る。

その傾きは $\frac{9-5}{7-3} = 1$ であるから直線 EF の式は $y = x + b$ と表せる。

$$\begin{aligned}y = x + b \text{ に } x = 3, y = 5 \text{ を代入すると} \\5 &= 3 + b \\b &= 2\end{aligned}$$

よって、求める直線の式は $y = x + 2$

12 [滝]

解説

- (1) $x = -4$ 、 $y = 8$ を $y = ax^2$ に代入すると
 $8 = a \times (-4)^2$

$$\text{よって} \quad a = \frac{1}{2}$$

- (2) $y = \frac{1}{2}x^2$ を $y = x + 4$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 &= x + 4 \\x^2 - 2x - 8 &= 0 \\(x + 2)(x - 4) &= 0 \\x &= -2, 4\end{aligned}$$

$$x = -2 \text{ を } y = x + 4 \text{ に代入すると} \quad y = -2 + 4 = 2$$

$$x = 4 \text{ を } y = x + 4 \text{ に代入すると} \quad y = 4 + 4 = 8$$

よって、点 A の座標は $(-2, 2)$

点 B の座標は $(4, 8)$

- (3) 直線 $y = x + 4$ と y 軸との交点を C とすると
OC = 4

$\triangle OAB = \triangle OAC + \triangle OBC$ であるから

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 12$$

- (4) 線分 OC の中点を D とすると

$$\triangle DAB = \frac{1}{2} \triangle OAB$$

よって、点 D を通り直線 AB に平行な直線と放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ との交点が点 P である。

この直線の式は $y = x + 2$

$y = \frac{1}{2}x^2$ を $y = x + 2$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 &= x + 2 \\x^2 - 2x - 4 &= 0 \\x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} = 1 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

これは問題に適している。

したがって、点Pのx座標は $1 \pm \sqrt{5}$

13

解説

(1) 点Aのy座標は $y = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

よって、点Aの座標は $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

点Bのy座標は $y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$

よって、点Bの座標は (2, 2)

直線ABの式を $y = ax + b$ とおくと $1 = \frac{1}{2}a + b, \quad 2 = 2a + b$

これを解いて $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$

したがって、直線ABの式は $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

(2) 点Cのx座標は、方程式 $4x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ の解のうち $\frac{1}{2}$ でない方である。

$$4x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

$$(3x+1)(2x-1) = 0$$

よって $x = -\frac{1}{3}$ このとき $y = 4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

したがって、点Cの座標は $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right)$

(3) 直線ABのy切片は $\frac{2}{3}$ であるから

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(4) $\triangle AOB$ の面積は $\frac{1}{2}$ であるから、 $\triangle APB$ の面積は $\triangle AOB$ の面積の半分である。

よって、ABを底辺と考えたときの $\triangle APB$ の高さが、 $\triangle AOB$ の高さの半になればよい。

直線ABは、傾きが $\frac{2}{3}$ 、y切片が $\frac{2}{3}$ の直線である。

よって、点Pは、傾きが $\frac{2}{3}$ 、y切片が $\frac{1}{3}$ の直線と

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ との交点のうち、x座標が0より大

きく2より小さいものである。

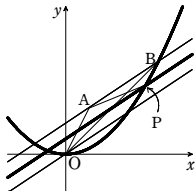
傾きが $\frac{2}{3}$ 、y切片が $\frac{1}{3}$ の直線の式は $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

よって、点Pのx座標は、方程式 $\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ の解のうち、0より大きく2より

小さいものである。

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 4x - 2 = 0$$



これを解いて $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \times (-2)}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$

したがって、点Pのx座標は $\frac{2 + \sqrt{10}}{3}$

14

解説

(1) 点A、Bはともに放物線 $y = ax^2$ 上にあるから、その座標は A(2, 4a), B(-4, 16a)

直線ABは、傾きが $\frac{4a-16a}{2-(-4)} = -2a$ であるから、

式を $y = -2ax + b$ とおくと、点Aを通るから

$$4a = -4a + b$$

$$b = 8a$$

よって、直線ABとy軸の交点をCとすると、点Cのy座標は 8a

$\triangle OAB$ の面積について

$$\frac{1}{2} \times 8a \times 2 + \frac{1}{2} \times 8a \times 4 = 6$$

よって $24a = 6$ したがって $a = \frac{1}{4}$

(2) ①から、直線ABの式は $y = -\frac{1}{2}x + 2$

点Oを通り、直線ABに平行な直線 $y = -\frac{1}{2}x$

と、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の交点をDとすると、

$\triangle DAB = \triangle OAB$ である。

このとき、点Dのx座標は $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x$ の解で

表される。

$$x^2 + 2x = 0$$

これを解くと $x = 0, -2$

点Dのx座標は0以外であるから $x = -2$

また、y軸上に $OC = PC$ となる点P(0, 4)をとると、 $\triangle PAB = \triangle OAB$ であるから、

点Pを通り、直線ABに平行な直線 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ と放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の交点をDとす

ると、 $\triangle DAB = \triangle OAB$ である。

このとき、点Dのx座標は $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 4$ の解で表される。

よって

$$x^2 + 2x - 16 = 0$$

これを解くと

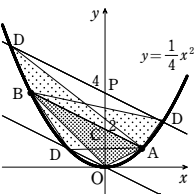
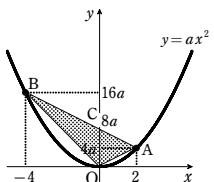
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-16)}}{2 \times 1} = -1 \pm \sqrt{17}$$

したがって、点Dのx座標は $-2, -1 \pm \sqrt{17}$

15

解説

(1) 放物線 $y = ax^2$ は点A(-2, 1)を通るから $1 = a \times (-2)^2$



よって $a = \frac{1}{4}$ 圈

(2) 点Bのy座標は $y = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$

よって、点Bの座標は (6, 9)

直線 ℓ の式を $y = mx + n$ とおく。

点A(-2, 1)を通るから $1 = -2m + n \dots\dots ①$

点B(6, 9)を通るから $9 = 6m + n \dots\dots ②$

①, ②を解いて $m = 1, \quad n = 3$

したがって、直線 ℓ の式は $y = x + 3$ 圈

(3) 直線 ℓ と y 軸の交点をDとすると、Dのy座標は 3である。

$\triangle PAB$ と $\triangle OAB$ は辺ABが共通であるから、面積

の比は底辺ABに対する高さの比に等しい。

右の図で影をつけた2つの三角形は相似であるから、

底辺ABに対する高さの比は、DP : OD と等しい。

よって、 $\triangle PAB : \triangle OAB = 2 : 1$ のとき

$$DP : OD = 2 : 1$$

OD = 3 であるから $DP : 3 = 2 : 1$

したがって $DP = 6$

Pは原点より上側にあるから、Pのy座標は

$$3 + 6 = 9 \quad \text{圈}$$

(4) $\triangle CAB = \triangle PAB$ となるのは、底辺ABに対する高さが等しいときである。

したがって、点Cは、点Pを通り直線 ℓ に平行な直線 m と放物線の交点である。

(2), (3)から、直線 m の式は $y = x + 9$ と表される。

よって、点Cのx座標は、方程式 $\frac{1}{4}x^2 = x + 9$ の解

で表される。

よって $x^2 - 4x - 36 = 0$

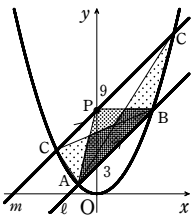
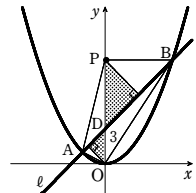
これを解くと $x = 2 \pm 2\sqrt{10}$

$x = 2 - 2\sqrt{10}$ のとき $y = 2 - 2\sqrt{10} + 9 = 11 - 2\sqrt{10}$

$x = 2 + 2\sqrt{10}$ のとき $y = 2 + 2\sqrt{10} + 9 = 11 + 2\sqrt{10}$

したがって、点Cの座標は

$$(2 - 2\sqrt{10}, 11 - 2\sqrt{10}), (2 + 2\sqrt{10}, 11 + 2\sqrt{10}) \quad \text{圈}$$



16

解説

- (1) 放物線 $y=ax^2$ は点 A $(-1, 2)$ を通るから $2=a \times (-1)^2$
よって $a=2$

- (2) $y=2x^2$ について
 $x=2$ のとき $y=2 \times 2^2=8$

よって、点 B の座標は $(2, 8)$
直線 AB の式を $y=px+q$ とおくと
 $2=-p+q, 8=2p+q$

これを解くと $p=2, q=4$
したがって、直線 AB の式は $y=2x+4$

- (3) 直線 AB と y 軸の交点を D とする。
直線 AB の y 切片は 4 であるから、点 D の座標は
 $(0, 4)$

したがって
 $\triangle OAB = \triangle OAD + \triangle OBD$
 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2$
 $= 2 + 4 = 6$

- (4) 点 $(2, 0)$ を E とする。
直線 AE の式を $y=mx+n$ とおくと
 $2=-m+n,$
 $0=2m+n$

これを解くと $m=-\frac{2}{3}, n=\frac{4}{3}$

よって、直線 AE の式は

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

また、直線 OB の式は $y=4x$

この 2 直線の交点 C の x 座標は、 $-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}=4x$ を解いて $x=\frac{2}{7}$

$\triangle OAC$ と $\triangle ABC$ は、底辺をそれぞれ OC, CB とみると、高さが等しいから

$$\triangle OAC : \triangle ABC = OC : CB$$

$$OC : OB = \frac{2}{7} : 2 = 1 : 7 \text{ であるから } OC : CB = 1 : 6$$

よって $\triangle OAC : \triangle ABC = 1 : 6$

17 [芝浦工業大学柏]

解説

- (1) $x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

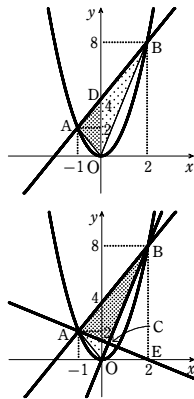
$$y=\frac{1}{2} \times 4^2=8$$

よって、点 A の座標は $(4, 8)$

$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=\frac{1}{2} \times (-2)^2=2$$

よって、点 B の座標は $(-2, 2)$



したがって、直線 AB の傾きは $\frac{8-2}{4-(-2)}=1$ であるから、その式は

$$y=x+b$$

とおける。

$x=4, y=8$ を $y=x+b$ に代入すると

$$8=4+b$$

$$b=4$$

よって、直線 AB の切片は 4

- (2) $x=3$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y=\frac{1}{2} \times 3^2=\frac{9}{2}$$

よって、点 P の座標は $(3, \frac{9}{2})$

したがって、直線 BP の傾きは $(\frac{9}{2}-2) \div [3-(-2)]=\frac{1}{2}$ であるから、その式は

$$y=\frac{1}{2}x+b'$$

とおける。

$x=-2, y=2$ を $y=\frac{1}{2}x+b'$ に代入すると

$$2=\frac{1}{2} \times (-2)+b'$$

$$b'=3$$

よって、直線 BP の式は $y=\frac{1}{2}x+3$

直線 OA の傾きは $\frac{8}{4}=2$ であるから、その式は $y=2x$

$y=2x$ を $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入すると

$$2x=\frac{1}{2}x+3$$

$$x=2$$

したがって、点 Q の x 座標は 2 であるから、3 点 B, Q, P のそれぞれの x 座標に注目すると

$$BQ : QP = [2-(-2)] : (3-2) = 4 : 1$$

- (3) 点 P を通り y 軸に平行な直線をひき、直線 AB との交点を C とする。

$x=3$ を $y=x+4$ に代入すると

$$y=3+4=7$$

よって $CP=7-\frac{9}{2}=\frac{5}{2}$

$\triangle ABP = \triangle BCP + \triangle ACP$ であるから

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times [4-(-2)] = \frac{15}{2}$$

- (4) 点 P を通り y 軸に平行な直線をひき、直線 OA との交点を D とする。

点 P の y 座標は $\frac{1}{2}p^2$, 点 D の y 座標は $2p$ であるから

$$DP=2p-\frac{1}{2}p^2$$

よって、 $\triangle AOP$ の面積について

$$\frac{1}{2} \times \left(2p-\frac{1}{2}p^2\right) \times 4 = \frac{7}{4}$$

$$4p-p^2=\frac{7}{4}$$

$$4p^2-16p+7=0$$

$$p=\frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2-4 \times 4 \times 7}}{2 \times 4}$$

$$=\frac{7}{2}, \frac{1}{2}$$

18

解説

- (1) $\angle POQ = \angle PQO$ となるとき、 $\triangle PQO$ は $PQ=PO$ である二等辺三角形となる。

点 P は線分 OQ の垂直二等分線上にあるから、P の y 座標は $\frac{3}{2}$ である。

したがって、点 P の x 座標は、方程式 $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}x^2$ の解である。

整理すると $x^2=3$

P の x 座標は正であるから $x=\sqrt{3}$

よって、点 P の座標は $(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$

- (2) 線分 OR の傾きは $-\frac{1}{2}$

OR // PQ であるから、直線 PQ は、傾きが $-\frac{1}{2}$, y 切片が 3 の直線である。

直線 PQ の式は $y=-\frac{1}{2}x+3$

したがって、点 P の x 座標は、方程式 $\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x+3$ の解である。

整理すると $x^2+x-6=0$

$$(x-2)(x+3)=0$$

P の x 座標は正であるから $x=2$

このとき

$$(\text{台形 OPQR の面積}) = \triangle OPQ + \triangle OQR$$

$$=\frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1$$

$$=\frac{9}{2}$$

19 [四天王寺]

解説

- (1) $x = -4$, $y = 2$ を $y = ax^2$ に代入すると

$$2 = a \times (-4)^2$$

$$\text{よって} \quad a = \frac{1}{8}$$

$$x = 8, y = b \text{ を } y = \frac{1}{8}x^2 \text{ に代入すると}$$

$$b = \frac{1}{8} \times 8^2$$

$$\text{よって} \quad b = 8$$

$$\text{直線 AB の傾きは} \quad \frac{8-2}{8-(-4)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって, 直線 AB の式は} \quad y = \frac{1}{2}x + c$$

$$x = 8, y = 8 \text{ を } y = \frac{1}{2}x + c \text{ に代入すると}$$

$$8 = \frac{1}{2} \times 8 + c$$

$$\text{よって} \quad c = 4$$

- (2) 点 Q の座標は $\left(p, \frac{1}{8}p^2\right)$ であるから

$$\triangle OQC = \frac{1}{2} \times 4 \times p = 2p \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\triangle ODQ = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{1}{8}p^2 = \frac{1}{2}p^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\triangle OQC = \triangle ODQ \text{ のとき}$$

$$2p = \frac{1}{2}p^2$$

$$p(p-4) = 0$$

$$0 < p < 8 \text{ であるから} \quad p = 4$$

- (3) 台形 OCB D の面積は $\frac{1}{2} \times (4+8) \times 8 = 48$

$$\text{また} \quad \triangle BQD = \frac{1}{2} \times 8 \times (8-p) = 4(8-p)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \triangle CQB &= 48 - \left[4(8-p) + 2p + \frac{1}{2}p^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2}p^2 + 2p + 16 \end{aligned}$$

$$\triangle ODQ = \triangle CQB \text{ のとき}$$

$$\frac{1}{2}p^2 = -\frac{1}{2}p^2 + 2p + 16$$

$$p^2 - 2p - 16 = 0$$

$$p = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-16)}}{2 \times 1} = 1 \pm \sqrt{17}$$

$$0 < p < 8 \text{ であるから} \quad p = 1 + \sqrt{17}$$

20 [明星]

解説

- (1) $x = 4$ を $y = -x + 8$ に代入すると

$$y = -4 + 8 = 4$$

$$\text{よって, 点 A の座標は} \quad (4, 4)$$

$$x = 4, y = 4 \text{ を } y = ax^2 \text{ に代入すると}$$

$$4 = a \times 4^2$$

$$\text{したがって} \quad a = \frac{1}{4}$$

$$\text{また, } x = 4, y = 4 \text{ を } y = \frac{1}{2}x + b \text{ に代入すると}$$

$$4 = \frac{1}{2} \times 4 + b$$

$$\text{したがって} \quad b = 2$$

- (2) $y = \frac{1}{4}x^2$ を $y = \frac{1}{2}x + 2$ に代入すると

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$x = 4, -2$$

$$\text{よって, 点 B の } x \text{ 座標は } -2 \text{ であるから, } x = -2 \text{ を } y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に代入すると}$$

$$y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$$

$$\text{したがって, 点 B の座標は} \quad (-2, 1)$$

- (3) 点 R の座標は $(t, -t+8)$, 点 Q の座標は $\left(t, \frac{1}{2}t+2\right)$

$$\text{よって} \quad RQ = (-t+8) - \left(\frac{1}{2}t+2\right) = -\frac{3}{2}t+6$$

$$\text{また, 直線} \textcircled{2} \text{ の切片は } 2, \text{ 直線} \textcircled{3} \text{ の切片は } 8 \text{ であるから}$$

$$DC = 8 - 2 = 6$$

$$\text{したがって, 台形 DCQR の面積について}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}t+6+6\right) \times t = 3$$

$$-\frac{3}{4}t^2 + 6t = 3$$

$$t^2 - 8t + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{解の公式により} \quad t &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \\ &= 4 \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$0 < t < 4 \text{ であるから} \quad t = 4 - 2\sqrt{3}$$

- (4) 点 P の座標は $\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$ であるから

$$QP = \frac{1}{2}t + 2 - \frac{1}{4}t^2$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABP = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}t + 2 - \frac{1}{4}t^2\right) \times \{4 - (-2)\}$$

$$= -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 6$$

$$\text{台形 DCQR の面積と } \triangle ABP \text{ の面積が等しいとき}$$

$$-\frac{3}{4}t^2 + 6t = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 6$$

$$\frac{9}{2}t = 6$$

$$\text{したがって} \quad t = \frac{4}{3}$$

第12章 2次関数 レベルC

1〔城北〕

解説

- (1) $x = -3$, $y = 3$ を $y = ax^2$ に代入すると

$$3 = a \times (-3)^2$$

$$\text{よって } a = \frac{1}{3}$$

- (2) 点Pの座標は (t, t) とおけるから

$$t = \frac{1}{3}t^2$$

$$t(t-3)=0$$

$t > 0$ であるから $t = 3$

よって、点Pの座標は $(3, 3)$

- (3) 点Qのx座標を s とすると、y座標は $s + 3 \times 2 = s + 6$

$$\text{よって } s + 6 = \frac{1}{3}s^2$$

$$s^2 - 3s - 18 = 0$$

$$(s+3)(s-6)=0$$

$s > 0$ であるから $s = 6$

よって、点Qの座標は $(6, 12)$

ℓ と y 軸の交点を R とする。

y 軸と ℓ は、2つの円に接するから、3点 R, P, Q は一直線上にある。

直線 PQ の式を $y = mx + n$ とすると

$$3 = 3m + n$$

$$12 = 6m + n$$

これを解くと $m = 3$, $n = -6$

したがって、直線 PQ の式は $y = 3x - 6$

$\triangle OPQ = \triangle ORQ - \triangle ORP$ であるから

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \times 6 \times (6 - 3) = 9$$

- (4) (3) より、 ℓ の切片は -6

2〔東大寺学園〕

解説

- (1) P($p, 0$), A(a, ka^2), B($3, 9k$), C($5, 25k$)

PA//BC, PA=BC より

$$\begin{cases} a - p = 5 - 3 & \cdots \cdots ① \\ ka^2 = 25k - 9k & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } ka^2 = 16k$$

$$k > 0 \text{ より } a^2 = 16$$

$$a < 0 \text{ より } a = -4$$

$$\textcircled{1} \text{ より } p = -6$$

- (2) P($-6, 0$), A($-4, 16k$) より、直線 PA の式は、 $y = 8kx + 48k$ と表される。

$y = kx^2$ との交点の x 座標は、 $kx^2 = 8kx + 48k$ の解で表されるから、 $k > 0$ より

$$x^2 = 8x + 48$$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$(x+4)(x-12)=0$$

$$x \neq -4 \text{ より } x = 12$$

よって、点Dのx座標は 12

- (3) 点Bを通り、y 軸に平行な直線と直線 AC との交点を E, 点Cを通り、y 軸に平行な直線と直線 AD との交点を F とする。

直線 AC の式は $y = kx + 20k$ であるから、E の座標は $(3, 23k)$

(2) より、F の座標は $(5, 88k)$

$$(\text{四角形 ABCD}) = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 14k \times (4+5) + \frac{1}{2} \times 63k \times (12+4)$$

$$= 567k$$

条件より $567k = 504$

$$k = \frac{8}{9}$$

3〔東京都立高〕

解説

- (1) $x = -3$, $y = -3$ を $y = ax^2$ に代入すると

$$-3 = a \times (-3)^2$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$\text{よって } y = -\frac{1}{3}x^2$$

点Bのx座標は2であるから、 $x = 2$ を $y = -\frac{1}{3}x^2$ に代入すると

$$y = -\frac{1}{3} \times 2^2 = -\frac{4}{3}$$

したがって、直線 OB の傾きは $-\frac{4}{3} \div 2 = -\frac{2}{3}$

よって、求める式は $y = -\frac{2}{3}x$

- (2) $y = \frac{25}{2}$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$\frac{25}{2} = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 25$$

$x < 0$ であるから $x = -5$

よって、点Pの座標は $\left(-5, \frac{25}{2}\right)$

$x = 2$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$$

よって、点Aの座標は $(2, 2)$

直線 ℓ と x 軸との交点を A' とすると、四角形 OA'AP の面積は

$$\frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{25}{2}\right) \times (2+5) - \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{25}{2} = \frac{39}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$x = 2$ を $y = ax^2$ に代入すると $y = a \times 2^2 = 4a$

$\triangle OA'B$ の面積は $\frac{45}{2} - \frac{39}{2} = 3 \text{ (cm}^2\text{)}$ であるから

$$\frac{1}{2} \times (-4a) \times 2 = 3$$

$$-4a = 3$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

- (3) $x = 2$ を $y = -\frac{1}{4}x^2$ に代入すると $y = -\frac{1}{4} \times 2^2 = -1$

よって、点Bの座標は $(2, -1)$

直線 OA の傾きは $\frac{2}{2} = 1$ であるから、その式は $y = x$

点Qは直線 OA 上にあるから、その座標は (t, t) とおける。

$x = t$, $y = t$ を $y = -\frac{1}{4}x^2$ に代入すると

$$t = -\frac{1}{4}t^2$$

$$t(t+4)=0$$

$t < 0$ であるから $t = -4$

よって、点Qの座標は $(-4, -4)$

$x = -4$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$

よって、点Pの座標は $(-4, 8)$

したがって $\triangle APQ = \frac{1}{2} \times [8 - (-4)] \times [2 - (-4)] = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$

$36 \div 2 = 18 \text{ (cm}^2\text{)}$ で、 $\triangle OPQ = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$ であるから、 n は線分 PQ と

交わる。

この交点を R とすると $\frac{1}{2} \times QR \times 4 = 18$

$$QR = 9 \text{ cm}$$

よって、点Rの座標は $(-4, 5)$

したがって、 n の傾きは $-\frac{5}{4}$ であるから、その式は $y = -\frac{5}{4}x$

n と ℓ との交点を S とする。

$x = 2$ を $y = -\frac{5}{4}x$ に代入すると $y = -\frac{5}{4} \times 2 = -\frac{5}{2}$

よって、点Sの座標は $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$

したがって $BS = -1 - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$

RQ//BS より、QC : CB = RQ : BS であるから

$$QC : CB = 9 : \frac{3}{2} = 6 : 1$$

$\triangle OQC : \triangle OCB = QC : CB$ であるから

$$\triangle OQC : \triangle OCB = 6 : 1$$

よって、 $\triangle OQC$ の面積は、 $\triangle OCB$ の面積の 6 倍である。

4 [大阪星光学院]

解説

- (1) 点 A は放物線 $y=x^2$ 上にあるから、 $y=x^2$ に $x=1$ を代入すると
 $y=1$

よって、点 A の座標は (1, 1)、点 B の座標は (-1, 1) である。

直線 AC の式は $y=-x+b$ とおける。

$y=-x+b$ に $x=1$, $y=1$ を代入すると

$$1=-1+b$$

$$b=2$$

よって、直線 AC の式は $y=-x+2$

直線 AB, AD, AC と y 軸の交点をそれぞれ B', D', C' とする。

△AB'C' において AC の傾きが -1, AB'=1 であるから $AC'=\sqrt{2}$

∠CAD=∠BAD より C'D':B'D'=AC':AB'= $\sqrt{2}:1$

よって、点 D' の y 座標は

$$1+1 \times \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}$$

- (2) 直線 AD の傾きは $\frac{1-\sqrt{2}}{1-0}=1-\sqrt{2}$ であるから、直線 AD の式は

$$y=(1-\sqrt{2})x+\sqrt{2}$$

点 D の x 座標は $x^2=(1-\sqrt{2})x+\sqrt{2}$ の解として表されるから

$$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$$

$$(x-1)(x+\sqrt{2})=0$$

よって $x=1, -\sqrt{2}$

点 D の x 座標は負であるから $x=-\sqrt{2}$

y 座標は $x=-\sqrt{2}$ を $y=x^2$ に代入して

$$y=2$$

よって、点 D の座標は $(-\sqrt{2}, 2)$

- (3) 点 C の x 座標は $x^2=-x+2$ の解として表されるから

$$x^2+x-2=0$$

$$(x-1)(x+2)=0$$

よって $x=1, -2$

$x \neq 1$ より $x=-2$

点 C の x 座標は -2 であるから、 y 座標は $(-2)^2=4$

したがって △ACD=△AC'D+△CC'D

$$=\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (2-1) + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (4-2)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

5 [慶應義塾女子]

解説

- (1) 点 C は放物線 $y=-\frac{1}{8}x^2$ 上にあり、 x 座標は
 -4 である。

よって、点 C の y 座標は $-\frac{1}{8} \times (-4)^2 = -2$

したがって、点 C の座標は $(-4, -2)$

△AOD の面積が 4, OA の長さが 4 である。

点 D の x 座標を t とすると $\frac{1}{2} \times 4 \times t = 4$

よって、 $t=2$ である。

直線 CO の式は $y=\frac{1}{2}x$ であるから、点 D の

y 座標は $\frac{1}{2} \times 2 = 1$

したがって、点 D の座標は $(2, 1)$

- (2) 直線 AD の式は、 $y=-\frac{3}{2}x+4$ である。

よって、点 E の x 座標は、方程式 $-\frac{1}{8}x^2=-\frac{3}{2}x+4$ の解で表される。

この方程式を整理すると $x^2-12x+32=0$

$$(x-4)(x-8)=0$$

$x=4$ または $x=8$ となるが、原点 O に近い方が点 E であるから $x=4$

点 E の x 座標は 4 である。 y 座標は $-\frac{1}{8} \times 4^2 = -2$

したがって、点 E の座標は $(4, -2)$

$y=ax^2$ の a の値を求める。

放物線 $y=ax^2$ は、点 D(2, 1) を通るから $1=a \times 2^2$

よって $a=\frac{1}{4}$

直線 BD の式は、 $y=\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$ である。

よって、点 F の x 座標は、方程式 $\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$ の解で表される。

この方程式を整理すると $3x^2-2x-8=0$

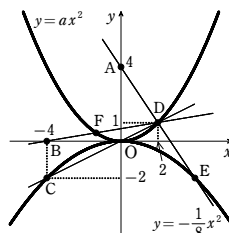
$$\text{これを解いて } x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-8)}}{2 \times 3} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6}$$

すなわち $x=2$ または $x=-\frac{4}{3}$

点 F は点 D と異なる点であるから $x=-\frac{4}{3}$

点 F の x 座標は $-\frac{4}{3}$ である。 y 座標は $\frac{1}{4} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

したがって、点 F の座標は $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{9}\right)$



- (3) 四角形 BCGF から △FCG を取り除き、△FCO を加えると、四角形 BCOF となる。

一方、四角形 FGED に △FCG を加えて、△FCO を取り除くと、五角形 FOCED となる。

よって、△FCG と △FOC の面積が等しければ

四角形 BCGF の面積と 四角形 BCOF の面積は等しい

かつ

四角形 FGED の面積と 五角形 FOCED の面積は等しい

ということになる。

このとき、(四角形 BCGF) : (四角形 FGED) = (四角形 BCOF) : (五角形 FOCED)

が成り立つ。

△FCG と △FOC の面積が等しくなるためには、FC と OG が平行であればよい。

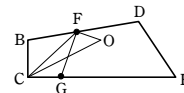
直線 FC の傾きは $\left\{\frac{4}{9} - (-2)\right\} \div \left\{-\frac{4}{3} - (-4)\right\} = \frac{22}{9} \div \frac{8}{3} = \frac{11}{12}$

よって、直線 OG の式は、 $y=\frac{11}{12}x$ である。

2点 C, E の y 座標はともに -2 であるから、点 G の y 座標も -2 となる。

$-2=\frac{11}{12}x$ を満たす x は $x=-\frac{24}{11}$

したがって、点 G の座標は $\left(-\frac{24}{11}, -2\right)$



6 [東大寺学園]

解説

- (1) 2点A, Bの座標は, A(-1, a), B(5, 25a)であるから, 直線ℓの傾きは

$$\frac{25a-a}{5-(-1)}=4a$$

直線mは直線ℓと平行で, 原点Oを通るから, 直線mの式は $y=4ax$

放物線Cと直線mの交点のx座標は, 方程式 $ax^2=4ax$ の解で表される。

この方程式を解いて $x=0$ または $x=4$

点Pは原点Oとは異なる点であるから, Pのx座標は 4

- (2) 3点A, B, Pの座標は, A(-1, a), B(5, 25a), P(4, 16a)であるから

直線AOの式は $y=-ax$, 直線BPの式は $y=9ax-20a$

よって, 点Qのx座標は, 方程式 $-ax=9ax-20a$ の解で表される。

この方程式を解いて $x=2$

したがって, 点Qの座標は (2, -2a)

- (3) 直線AQと直線PRが垂直に交わるから, 直線OAと直線OPも垂直に交わる。

2点A, Pの座標は, A(-1, a), P(4, 16a)であるから

直線OAの傾きは $\frac{0-a}{0-(-1)}=-a$, 直線OPの傾きは $\frac{16a-0}{4-0}=4a$

よって, $(-a) \times 4a = -1$ より $a^2 = \frac{1}{4}$ $a > 0$ であるから $a = \frac{1}{2}$

このとき, 3点A, P, Qの座標は, A(-1, $\frac{1}{2}$), P(4, 8), Q(2, -1)である。

放物線 $y=bx^2$ ($b < 0$) は, 点Qを通るから $-1=4b$

これを解いて $b=-\frac{1}{4}$ これは, $b < 0$ という条件を満たす。

点Rは, 直線OP上にある。直線OPの式は $y=2x$ であるから, Rの座標は $(t, 2t)$ とおくことができる。

この点が, 放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 上にあるから $2t=-\frac{1}{4}t^2$

この方程式を解いて $t=0$ または $t=-8$

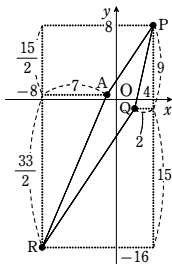
Rは原点Oとは異なる点であるから $t \neq 0$

よって, $t=-8$ であるから, Rの座標は $(-8, -16)$

PRを対角線とする長方形から, 2つの台形と2つの直角三角形を取り除くと, 四角形APQRが残る。

この方針で四角形APQRの面積を求める。

$$\begin{aligned} & 24 \times 12 \\ & -\frac{1}{2} \times (12+7) \times \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{33}{2} \\ & -\frac{1}{2} \times 2 \times 9 - \frac{1}{2} \times (2+12) \times 15 \\ & = 288 - \frac{285}{4} - \frac{231}{4} - 9 - 105 \\ & = 45 \end{aligned}$$



7 [東京都立高]

解説

- (1) Pの座標を $(p, \frac{1}{2}p^2)$ とおくと

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \times 8 \times \left(8 - \frac{1}{2}p^2\right) = 2(4+p)(4-p)$$

$$\triangle BCP = \frac{1}{2} \times 8 \times (4-p) = 4(4-p)$$

よって $\triangle ABP : \triangle BCP = 2(4+p)(4-p) : 4(4-p) = (4+p) : 2$

したがって $\triangle ABP : \triangle BCP = 3 : 8$

$$(4+p) : 2 = 3 : 8$$

$$p = -\frac{13}{4}$$

Pの座標は $(-\frac{13}{4}, \frac{169}{32})$, Bの座標は (4, 8)

直線BPの傾きは $(8 - \frac{169}{32}) \div (4 - (-\frac{13}{4})) = \frac{3}{8}$ であるから, 直線BPの式を

$$y = \frac{3}{8}x + b \text{ とおくと, } (4, 8) \text{ を通るから}$$

$$8 = \frac{3}{8} \times 4 + b$$

$$b = \frac{13}{2}$$

よって, 直線BPの式は $y = \frac{3}{8}x + \frac{13}{2}$

- (2) (ア) Qの座標を $(q, \frac{1}{2}q^2)$ とおくと, Rの座標は $(-q, \frac{1}{2}q^2)$

直線mの傾きは $(8 - \frac{1}{2}q^2) \div (10-q)$

直線nの傾きは $(8 - \frac{1}{2}q^2) \div (10+q)$

よって $(8 - \frac{1}{2}q^2) \div (10-q) = 2 \times (8 - \frac{1}{2}q^2) \div (10+q)$

$$(10+q) = 2 \times (10-q)$$

$$q = \frac{10}{3}$$

したがって, Rの座標は $(-\frac{10}{3}, \frac{50}{9})$

- (イ) $\triangle ADR : \triangle APQ = 7 : 5$ と $\triangle ADR = \triangle ADQ$ より $\triangle ADQ : \triangle APQ = 7 : 5$

$\triangle ADQ : \triangle APQ = DQ : PQ$ であるから $DQ : PQ = 7 : 5$

ここで, 点Pを通りy軸に平行な直線と直線ℓとの交点をH, 点Qを通りy軸に平行な直線と直線ℓとの交点をKとする。

$DQ : PQ = DK : HK$ より $DK : HK = 7 : 5$

よって, 点Qのx座標をtとすると, 点Pのx座標は

$$t - \frac{5}{7}(10-t) = \frac{2}{7}(6t-25)$$

点Pのy座標は $\frac{2}{49}(6t-25)^2$

$QK : PH = 7 : 12$ であるから

$$(8 - \frac{1}{2}t^2) : (8 - \frac{2}{49}(6t-25)^2) = 7 : 12$$

整理すると

$$t^2 - 20t + 51 = 0$$

$$(t-3)(t-17) = 0$$

$0 < t < 4$ より $t = 3$

よって, 点Qの座標は $(3, \frac{9}{2})$

8 [東京都立高]

解説

- (1) 点 A の y 座標が 1 であるから、点 P の y 座標も 1 であり、点 P は $y=x^2$ 上の点であるから、点 P の座標は (1, 1) である。

また、点 B の座標は (-1, 1) である。

点 P の座標は (1, 1) で $k=\frac{1}{2}$ であるから、点 C の座標は $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ であり、2 点 B,

C を通る直線 m の傾きは

$$\left(\frac{9}{4}-1\right) \div \left(\frac{3}{2}-(-1)\right) = \frac{5}{4} \div \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

- (2) (ア) 点 P (2, 4) であるから、点 B の座標は (-2, 4) である。

$\triangle PCB = \triangle QCB$ より、 $PQ \parallel BC$ であるから、直線 PQ の傾きは 2 である。直線 PQ の式は、 $y=2x+b$ と表され、点 P を通るから、 $y=2x$ となる。

また、点 A (2+k, 4) であるから、点 C (2+k, (2+k)²) と表せられ、直線 m の傾きが 2 であるから

$$BA : AC = 1 : 2$$

$$AC = 2BA$$

$$(2+k)^2 - 4 = 2[2+k - (-2)]$$

$$4 + 4k + k^2 - 4 = 2(4+k)$$

$$k^2 + 4k = 8 + 2k$$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0$$

よって $k = -4, 2$

$k > 0$ より $k = 2$

点 Q は $y=2x$ 上にあり、x 座標が 4 であるから点 Q の座標は (4, 8)

よって、2 点 B (-2, 4), Q (4, 8) を通る直線の傾きは

$$\frac{8-4}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$y = \frac{2}{3}x + c$ に (-2, 4) を代入すると

$$4 = -\frac{4}{3} + c$$

$$c = \frac{16}{3}$$

よって、求める直線の式は $y = \frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$

- (イ) 点 P の座標を (p, p^2) とすると、点 B の座標は $(-p, p^2)$ 、点 A の座標は $(p+k, p^2)$ 、点 C の座標は $(p+k, (p+k)^2)$ と表される。

直線 m の傾きが 1 であるから

$$\frac{(p+k)^2 - p^2}{(p+k) - (-p)} = 1$$

$$\frac{2pk + k^2}{2p + k} = 1$$

$$k = 1$$

また、点 Q は AC の中点であるから、その座標は $(p+1, p^2 + p + \frac{1}{2})$

P, Q を通る直線の傾きが 2 であるから

$$\frac{p^2 + p + \frac{1}{2} - p^2}{(p+1) - p} = 2$$

$$p + \frac{1}{2} = 2$$

$$p = \frac{3}{2}$$

よって、点 A の座標は $(\frac{5}{2}, \frac{9}{4})$

9 [ラ・サール]

解説

3 点 A, B, C の座標はそれぞれ A (-4, 4), B $(-1, \frac{1}{4})$, C (2, 1) である。

- (1) 直線 AC の傾きは $\frac{1-4}{2-(-4)} = -\frac{1}{2}$

直線 AC の式を $y = -\frac{1}{2}x + k$ とおく。

$x=2$ のとき $y=1$ となるから $1 = -1 + k$

よって、 $k=2$ であるから、直線 AC の式は

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

- (2) 辺 AC を含む台形から、辺 AB を含む台形、辺 BC

を含む台形の 2 つを取り除けば、 $\triangle ABC$ が残る。

この方針で、 $\triangle ABC$ の面積を求めると

$$\frac{1}{2} \times (4+1) \times [2 - (-4)] - \frac{1}{2} \times \left(4 + \frac{1}{4}\right) \times \{(-1) - (-4)\} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + 1\right) \times [2 - (-1)]$$

$$= 15 - \frac{51}{8} - \frac{15}{8}$$

$$= \frac{27}{4}$$

- (3) 直線 AC に平行で、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線と

辺 AB, 辺 BC との交点を、それぞれ P, Q とする。

$AC \parallel PQ$ であるから、 $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$ である。

$\triangle PBQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ となるから、 $\triangle ABC$ と $\triangle PBQ$ の

相似比は $\sqrt{2} : 1$ となる。

よって、 $AB : PB = \sqrt{2} : 1$ である。

点 P の座標を (t, u) とする。

x 座標について

$$\{(-1) - (-4)\} : \{(-1) - t\} = \sqrt{2} : 1$$

$$3 : (-1 - t) = \sqrt{2} : 1$$

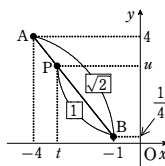
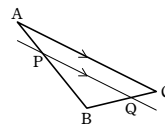
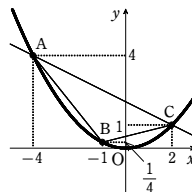
$$\sqrt{2}(-1 - t) = 3 \quad t = \frac{-3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2} + 2}{2}$$

y 座標について

$$\left(4 - \frac{1}{4}\right) : \left(u - \frac{1}{4}\right) = \sqrt{2} : 1$$

$$\sqrt{2}\left(u - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4} \quad \text{より} \quad u = \frac{15 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2} + 2}{8}$$

点 P $\left(-\frac{3\sqrt{2} + 2}{2}, \frac{15\sqrt{2} + 2}{8}\right)$ を通る傾き $-\frac{1}{2}$ の直線の式を求めればよい。



求める直線の式を $y = -\frac{1}{2}x + a$ とおくと $\frac{15\sqrt{2} + 2}{8} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{4} + a$

$$\text{よって} \quad a = \frac{15\sqrt{2} + 2}{8} - \frac{3\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{9\sqrt{2} - 2}{8}$$

したがって、求める直線の式は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9\sqrt{2} - 2}{8}$

10 [灘]

解説

- (1) 直線 AB の傾きは

$$\left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2\right) \div (b-a) = \frac{1}{2}(b+a)(b-a) \div (b-a) \\ = \frac{1}{2}(a+b)$$

直線 AB の式を $y = \frac{1}{2}(a+b)x + 2$ とすると、点 A を通るから

$$\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a(a+b) + 2 \\ ab = -4 \quad \cdots \cdots ①$$

点 C を通り、直線 AB に平行な直線と y 軸との交点の y 座標は 1 であるから、

$$y = \frac{1}{2}(a+b)x + 1 \text{ とおける。}$$

点 C を通るから

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(a+b) + 1 \\ b = -a + 1 \quad \cdots \cdots ②$$

$$①, ② \text{ より } a(-a+1) = -4$$

$$a^2 - a - 4 = 0$$

解の公式により

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} \\ = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$a < -1 \text{ より } a = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \quad b = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

- (2) 直線 BC の傾きは

$$\left(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}\right) \div (b+1) = \frac{1}{2}(b+1)(b-1) \div (b+1) \\ = \frac{b-1}{2}$$

よって、直線 BC の式を $y = \frac{b-1}{2}x + c$ とすると、点 C を通るから

$$\frac{1}{2} = \frac{1-b}{2} + c \\ c = \frac{b}{2}$$

$$\text{したがって } \triangle COB = \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times b$$

$$= \frac{b}{4} \times (b+1)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \times \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$= \frac{20 + 4\sqrt{17}}{16}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

11 [灘]

解説

- (1) B, C の x 座標をそれぞれ b, c とおく。

このとき、3 点 A, B, C の座標は $A(-a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ となる。

$$\text{直線 AB の傾きは } p = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} = b+a$$

$$\text{直線 BC の傾きは } q = \frac{c^2 - b^2}{c - b} = \frac{(c+b)(c-b)}{c-b} = c+b$$

$$\text{直線 CA の傾きは } r = \frac{c^2 - a^2}{c - a} = \frac{(c+a)(c-a)}{c-a} = c+a$$

$$p:q = 1:6 \text{ より } (b-a):(c+b) = 1:6$$

$$6(b-a) = c+b \text{ より } 6a - 5b + c = 0 \quad \cdots \cdots ①$$

$$q:r = 2:1 \text{ より } (c+b):(c-a) = 2:1$$

$$c+b = 2(c-a) \text{ より } 2a+b-c = 0 \quad \cdots \cdots ②$$

$$①+② \text{ より } 8a-4b = 0 \text{ すなわち } b = 2a$$

$$\text{これを } ① \text{ に代入すると } 6a-10a+c = 0 \text{ すなわち } c = 4a$$

したがって、B の x 座標は $2a$, C の x 座標は $4a$

- (2) 3 点 A, B, C の座標は $A(-a, a^2)$, $B(2a, 4a^2)$, $C(4a, 16a^2)$

$$\text{直線 OC の式は } y = 4ax, \quad \text{直線 AB の式は } y = ax + 2a^2$$

よって、点 D の x 座標は、方程式 $4ax = ax + 2a^2$ の解で表される。

$$3ax = 2a^2 \text{ を解いて } x = \frac{2}{3}a$$

$$\text{したがって } AD:DB = \left[\frac{2}{3}a - (-a)\right] : \left(2a - \frac{2}{3}a\right) = \frac{5}{3} : \frac{4}{3} = 5:4$$

- (3) ②より $AD:DB = 5:4$ である。

$AE:EC = r:(1-r)$ とおく。

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\triangle ADE = \frac{5}{5+4} \times \frac{r}{r+(1-r)} \times S = \frac{5}{9}rS$$

$$\triangle ADE = \frac{1}{2}S \text{ であるから } \frac{5}{9}r = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } r = \frac{9}{10}$$

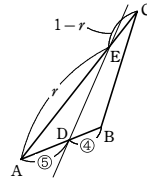
$$AE:EC = \frac{9}{10} : \frac{1}{10} = 9:1 \text{ となる。}$$

$A(-a, a^2)$, $C(4a, 16a^2)$ であるから

$$\text{点 E の } x \text{ 座標は } 4a - \frac{1}{10}[4a - (-a)] = 4a - \frac{a}{2} = \frac{7}{2}a$$

$$\text{点 E の } y \text{ 座標は } 16a^2 - \frac{1}{10}(16a^2 - a^2) = 16a^2 - \frac{3}{2}a^2 = \frac{29}{2}a^2$$

$$\text{したがって、E の座標は } \left(\frac{7}{2}a, \frac{29}{2}a^2\right)$$



12 [慶應義塾女子]

解説

- (1) 直線 LM の傾きは $\frac{ap^2 - aq^2}{p - q} = \frac{a(p+q)(p-q)}{p-q} = a(p+q)$

直線 LM の式を $y = a(p+q)x + b$ とおくと、点 L を通るから

$$ap^2 = a(p+q)p + b$$

$$b = ap^2 - ap^2 - apq$$

$$b = -apq$$

- (2) (ア) 点 C, D の座標はそれぞれ $(1, 1)$, $(-1, 1)$

$$\text{直線 BC の傾きは } (0-1) \div \left(\frac{3}{2}-1\right) = -2$$

直線 BC の式を $y = -2x + c$ とおくと、点 C を通るから

$$1 = -2 + c$$

$$c = 3$$

よって、直線 BC の式は $y = -2x + 3$

点 L は直線 BC 上にあるから

$$ap^2 = -2p + 3$$

したがって

$$ap^2 + 2p = 3 \quad \cdots \cdots ①$$

同様に、直線 AD の式を求めると $y = x + 2$

点 M は直線 AD 上にあるから

$$aq^2 = q + 2$$

したがって

$$aq^2 - q = 2 \quad \cdots \cdots ②$$

- (イ) ①より

$$\frac{1}{2}p^2 + 2p = 3$$

$$p^2 + 4p - 6 = 0$$

解の公式により

$$p = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{10}$$

$$p > 0 \text{ より } p = -2 + \sqrt{10}$$

- ②より

$$\frac{1}{2}q^2 - q = 2$$

$$q^2 - 2q - 4 = 0$$

解の公式により

$$q = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{5}$$

$$q < 0 \text{ より } q = 1 - \sqrt{5}$$

このとき

$$b = -\frac{1}{2} \times (-2 + \sqrt{10})(1 - \sqrt{5})$$

$$= -\frac{1}{2}(-2 + 2\sqrt{5} + \sqrt{10} - 5\sqrt{2})$$

したがって

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \times 2 \times a q^2 + \frac{1}{2} \times b \times (-q) \\
 &= a q^2 - \frac{1}{2} b q \\
 &= 3 - \sqrt{5} - \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5} - 3 + \frac{3\sqrt{10}}{2} \\
 &= \frac{3\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$