

1

解説

(1) 不等式 $k - x < 2x + 1$ を変形すると $3x > k - 1$

$$\text{よって } x > \frac{k-1}{3}$$

$$\text{不等式 } \sqrt{5}x < k - x \text{ を変形すると } (\sqrt{5} + 1)x < k$$

$$\text{ゆえに } x < \frac{k}{\sqrt{5} + 1}$$

$$\text{ここで } \frac{k}{\sqrt{5} + 1} = \frac{k(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{k(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}k$$

$$\text{よって } x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}k$$

したがって、不等式①を満たす x が存在するための条件は

$$\frac{k-1}{3} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}k$$

$$\text{両辺に 12 を掛けて } 4k - 4 < (-3 + 3\sqrt{5})k \quad \text{すなわち } (7 - 3\sqrt{5})k < 4$$

$$7 - 3\sqrt{5} > 0 \text{ であるから } k < \frac{4}{7 - 3\sqrt{5}}$$

$$\text{ここで } \frac{4}{7 - 3\sqrt{5}} = \frac{4(7 + 3\sqrt{5})}{(7 - 3\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})} = \frac{4(7 + 3\sqrt{5})}{49 - 45} = 7 + 3\sqrt{5}$$

$$\text{よって、求める } k \text{ の値の範囲は } k < 7 + 3\sqrt{5} \quad \dots\dots ②$$

(2) ②が成り立つとき、不等式①を満たす x の値の範囲は

$$\frac{k-1}{3} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}k \quad \dots\dots ③$$

③の範囲の幅が $\frac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるための条件は

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}k - \frac{k-1}{3} > \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{両辺に 12 を掛けて整理すると } (3\sqrt{5} - 7)k > 4\sqrt{5} - 4$$

$$3\sqrt{5} - 7 < 0 \text{ であるから } k < \frac{4 - 4\sqrt{5}}{7 - 3\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \frac{4 - 4\sqrt{5}}{7 - 3\sqrt{5}} &= \frac{(4 - 4\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})}{(7 - 3\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})} = \frac{4(1 - \sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})}{49 - 45} \\ &= 7 + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} - 15 \\ &= -8 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{したがって、求める } k \text{ の値の範囲は } k < -8 - 4\sqrt{5}$$

2

解説

$$(1) \cos^2 \angle ABC = 1 - \sin^2 \angle ABC = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\text{よって} \quad \cos \angle ABC = \pm \frac{1}{4}$$

$$(2) (i) \text{ 正弦定理により} \quad \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$$

$$\text{よって} \quad \frac{4AC}{\sqrt{15}} = \frac{8AB}{\sqrt{15}} \quad \text{すなわち} \quad AC = 2AB \quad \dots\dots ①$$

$$(ii) \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ であるから, (1) より} \quad \cos \angle ABC = \pm \frac{1}{4}$$

$$AB = x \text{ とおくと, (i) から} \quad AC = 2x$$

$$[1] \cos \angle ABC = -\frac{1}{4} \text{ のとき, 余弦定理により} \quad (2x)^2 = x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)$$

$$\text{よって} \quad 6x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2x+1)(3x-2) = 0$$

$$x > 0 \text{ であるから} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$[2] \cos \angle ABC = \frac{1}{4} \text{ のとき, 余弦定理により} \quad (2x)^2 = x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{よって} \quad 6x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2x-1)(3x+2) = 0$$

$$x > 0 \text{ であるから} \quad x = \frac{1}{2}$$

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \cdot \sin \angle ABC$ であり, [1] のときの x の値が, [2] のときの x の値より大きいから, [1] のときの方が $\triangle ABC$ の面積も大きい。

$$\text{したがって} \quad AB = \frac{2}{3}$$

(3) $\sin \angle ABC = 2 \sin \angle ACB$ のとき, 正弦定理により $AC = 2AB$ が成り立つ。

$$\text{余弦定理により} \quad \cos \angle ABC = \frac{1^2 + AB^2 - (2AB)^2}{2 \cdot 1 \cdot AB} = \frac{1 - 3AB^2}{2AB}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC \text{ であるから}$$

$$S^2 = \frac{1}{4} AB^2 \cdot 1^2 \cdot \sin^2 \angle ABC = \frac{1}{4} AB^2 (1 - \cos^2 \angle ABC)$$

$$= \frac{1}{4} AB^2 \left\{ 1 - \frac{(1 - 3AB^2)^2}{4AB^2} \right\}$$

よって, $AB^2 = x$ とおくと

$$S^2 = \frac{1}{4} x \left\{ 1 - \frac{(1 - 3x)^2}{4x} \right\} = -\frac{9}{16} x^2 + \frac{5}{8} x - \frac{1}{16}$$

$$= -\frac{9}{16} \left(x - \frac{5}{9} \right)^2 + \frac{1}{9}$$

$$\text{ゆえに, } S^2 \text{ が最大となる } x \text{ の値は} \quad x = \frac{5}{9}$$

$$\text{よって } AB^2 = \frac{5}{9} \quad AB > 0 \text{ であるから } AB = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{ゆえに, } \triangle ABC \text{ の 3 辺は } AB = \frac{\sqrt{5}}{3}, BC = 1, AC = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{よって, } AB^2 = \frac{5}{9}, BC^2 = 1, AC^2 = \frac{20}{9} \text{ より, } AC^2 > AB^2 + BC^2 \text{ が成り立つから,}$$

$\angle ABC$ は鈍角である。よって, $\angle ACB$ は鋭角である。 (チ ②, ツ ④)

3

解説

(ア) ~ (ウ) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 (100, 1250), (200, 450), (300, 50)

$$\text{を通るとき} \quad 1250 = 10000a + 100b + c \quad \cdots \cdots [A],$$

$$450 = 40000a + 200b + c \quad \cdots \cdots [B],$$

$$50 = 90000a + 300b + c \quad \cdots \cdots [C]$$

$$[B] - [A] \text{ から } -800 = 30000a + 100b \quad \text{すなわち} \quad 300a + b = -8 \quad \cdots \cdots [D]$$

$$[C] - [B] \text{ から } -400 = 50000a + 100b \quad \text{すなわち} \quad 500a + b = -4 \quad \cdots \cdots [E]$$

$$[D], [E] \text{ を解いて } a = \frac{1}{50}, b = \text{アイウ} - 14$$

(エ), (オ) また, 売り上げ数を ① の右辺の 2 次式 $ax^2 + bx + c$ とすると, 利益は

$$(ax^2 + bx + c)(x - 80) - 5000 \text{ と表される。}$$

よって, 利益は x の 3 次式となる。

一方で, 売り上げ数として ① の右辺の代わりに x の 1 次式を使えば, 利益は x の 2 次式となる。

(カ) ~ (ス) 売り上げ数を ② の右辺としたときの利益 z は

$$\begin{aligned} z &= (-4x + 1160)(x - 80) - 5000 \\ &= -4x^2 + 1480x - 97800 \end{aligned}$$

$$\text{これを变形すると } z = -4(x - 185)^2 + 39100$$

よって, z が最大となる x を p とおくと, $p = \text{サシス} 185$ であり, z の最大値は 39100 である。

(セ), (ソ) 図 3 から, ②, ③ はいずれも売り上げ数を少なく見積もっている式であることがわかる。ゆえに各 x の値に対する利益は, 売り上げ数を ① の右辺としたときの利益よりも少ない。

これを満たすものは セ ③, ソ ④

(タ) $100 \leq x \leq 300$ において, (セ) から, 売り上げ数を ① の右辺としたときの利益の最大値 M は 50112 よりも大きくなり, ④ は売り上げ数を多く見積もっている式であるから, M は 74350 よりも小さい。

ゆえに, これを満たすものは タ ②

4

解説

(1) データの値の総和 $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ は賛成の人の数と一致し、平均値

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ は } n \text{ 人中における賛成の人の割合である。} \quad (\text{ア } \textcircled{0}, \text{ イ } \textcircled{3})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad s^2 &= \frac{1}{n} \left\{ \left(x_1 - \frac{m}{n} \right)^2 + \left(x_2 - \frac{m}{n} \right)^2 + \dots + \left(x_n - \frac{m}{n} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ m \left(1 - \frac{m}{n} \right)^2 + (n-m) \left(0 - \frac{m}{n} \right)^2 \right\} \quad (\text{ウ } \textcircled{0}, \text{ エ } \textcircled{2}) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ m \left(1 - \frac{2m}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right) + (n-m) \cdot \frac{m^2}{n^2} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ m \left(1 - \frac{2m}{n} \right) + (m+n-m) \cdot \frac{m^2}{n^2} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left(m - \frac{2m^2}{n} + \frac{m^2}{n} \right) = \frac{m(n-m)}{n^2} \dots\dots \textcircled{1} \quad (\text{オ } \textcircled{2}) \end{aligned}$$

5

解説

$$\bar{x} = \frac{-1-1+1+1+5a}{5} = a \quad (\text{ア } \textcircled{3}), \quad \bar{y} = \frac{-1+1-1+1+5a}{5} = a$$

x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
-1	-1	-1-a	-1-a	$(1+a)^2$	$(1+a)^2$	$(1+a)^2$
-1	1	-1-a	1-a	a^2-1	$(1+a)^2$	$(1-a)^2$
1	-1	1-a	-1-a	a^2-1	$(1-a)^2$	$(1+a)^2$
1	1	1-a	1-a	$(1-a)^2$	$(1-a)^2$	$(1-a)^2$
5a	5a	4a	4a	$16a^2$	$16a^2$	$16a^2$

上の表から、 W' の x と y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{5} \{ (1+a)^2 + a^2 - 1 + a^2 - 1 + (1-a)^2 + 16a^2 \} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 20a^2 = 4a^2 \quad (\text{イ } \textcircled{0}) \end{aligned}$$

W' の x と y の標準偏差を、それぞれ s_x , s_y とすると

$$\begin{aligned} s_x &= \sqrt{\frac{1}{5} \{ (1+a)^2 + (1+a)^2 + (1-a)^2 + (1-a)^2 + 16a^2 \}} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{5}} \\ s_y &= \sqrt{\frac{1}{5} \{ (1+a)^2 + (1-a)^2 + (1+a)^2 + (1-a)^2 + 16a^2 \}} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{5}} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad s_x s_y = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{5}} \times \sqrt{4a^2 + \frac{4}{5}} = 4a^2 + \frac{4}{5} \quad (\text{ウ } \textcircled{2})$$

$$\text{ゆえに, } s_{xy} \geq 0.95 s_x s_y \text{ とすると} \quad 4a^2 \geq \frac{95}{100} \left(4a^2 + \frac{4}{5} \right)$$

$$\text{すなわち} \quad a^2 \geq \frac{19}{20} \left(a^2 + \frac{1}{5} \right)$$

両辺に 100 を掛けて整理すると $5a^2 - 19 \geq 0$

よって $(\sqrt{5}a + \sqrt{19})(\sqrt{5}a - \sqrt{19}) \geq 0$

したがって $a \leq -\frac{\sqrt{95}}{5}, \frac{\sqrt{95}}{5} \leq a$ (⊕ ③)

6

(解説)

(1) (i) 点 (3, 3) に至る移動の仕方は、点 (2, 2) から移動する場合のみであるから

ア 1 通り

点 (3, 1) に至る移動の仕方は、点 (2, 2) から移動する場合と点 (2, 0) から移動する場合があるから $1 + 2 = \text{イ} 3$ 通り

点 (3, -1) に至る移動の仕方は、点 (2, 0) から移動する場合のみであるから

ウ 2 通り

(ii) 右の図から、 $y_1 \geq 0$ かつ $y_2 \geq 0$ かつ $y_3 \geq 0$ かつ

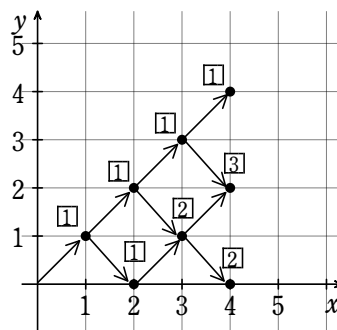
$y_4 \geq 0$ である確率は $\frac{1+3+2}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{\text{エ} 3}{オ 8}$

また、 $y_3 = 1$ であるのは点 (3, 1) を通る場合であり、この場合常に $y_4 \geq 0$ であるから、 $y_1 \geq 0$ かつ $y_2 \geq 0$

かつ $y_3 = 1$ かつ $y_4 \geq 0$ である確率は $\frac{2}{2^3} = \frac{\text{カ} 1}{キ 4}$

さらに、 $y_1 \geq 0$ かつ $y_2 \geq 0$ かつ $y_3 \geq 0$ かつ $y_4 \geq 0$

であったとき、 $y_3 = 1$ である条件付き確率は $\frac{1}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{\text{ク} 2}{ケ 3}$



(iii) 硬貨を 4 回投げ終えた時点で点 P の座標が (4, 2) であるとき、点 (4, 2) に至る移動の仕方によらず表の出る回数は $\text{コ} 3$ 回となり、裏の出る回数は 1 回となる。

(2) (i) 3 の倍数の目が出た回数を k とし、 $k - (7 - k) = 3$ とすると $k = 5$

ゆえに、さいころを 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であるための条件は、3 の倍数の目が 5 回出て、それ以外の目が 2 回出るときである。

よって、求める確率は ${}_7C_5 \left(\frac{2}{6}\right)^5 \left(\frac{4}{6}\right)^2 = 21 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\text{サン} 28}{\text{スセソ} 729}$

(ii) 座標平面上の点 Q' が次のような規則 2' に従って移動するものとする。

[規則 2']

- ・点 Q' は原点 (0, 0) を出発点とする。
- ・点 Q' の x 座標は、さいころを投げるごとに 1 だけ増加する。
- ・点 Q' の y 座標は、さいころを投げるごとに、3 の倍数の目が出たら 1 だけ増加し、それ以外の目が出たら 1 だけ減少する。

また、さいころを k 回投げ終えた時点での点 Q' の座標 (x, y) を (k, y_k) で表す。

このとき、点 Q の座標が つねに 0 以上 3 以下であり、かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であることは、点 Q' が $0 \leq y_k \leq 3$ ($0 \leq k \leq 7$) を満たしながら点 (7, 3)

に至ることと同じである。

よって、(1)と同様に図を用いて点 Q' の移動の仕方を考えると、右の図から、8通りである。

点 $(7, 3)$ に至るまでのどの移動の仕方に対しても、3の倍数の目は5回、それ以外の目は2回出るから、求める確率は

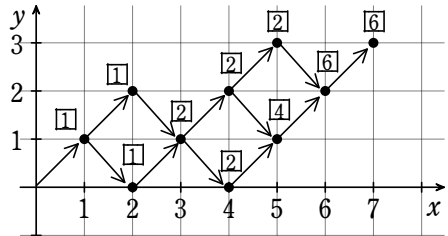
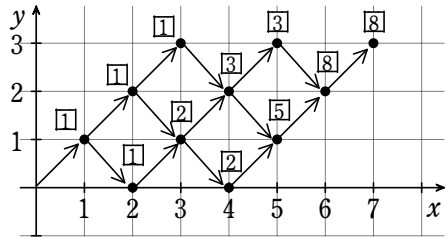
$$8 \times \left(\frac{2}{6}\right)^5 \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 = 8 \times \frac{4}{3^7} = \frac{\text{タチ} 32}{\text{ツテトナ} 2187} \dots\dots ①$$

(iii) 右の図から、点 Q' が $0 \leq y_k \leq 3$

($0 \leq k \leq 7$) を満たしながら、点 $(3, 1)$ を通って点 $(7, 3)$ に至る場合の確率 P について、移動の仕方は6通りあり、そのどの移動の仕方に対しても、3の倍数の目は5回、それ以外の目は2回出るから

$$P = 6 \times \left(\frac{2}{6}\right)^5 \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 = 6 \times \frac{4}{3^7} \dots\dots ②$$

したがって、求める条件付き確率は、①、②から $6 \div 8 = \frac{3}{4}$



7

解説

(1) ① $\times 5 - ②$ から x を消去すると $26y + 51z = 3 \dots\dots ③$

③ から $51z = 3 - 26y$

右辺の式に $y = 1, 2, \dots\dots$ と順に代入し、その値が51の倍数になる最小の y の値を求めると $y = 6$ このとき $z = -3$

よって $26 \cdot 6 + 51 \cdot (-3) = 3 \dots\dots [A]$

③ $- [A]$ から $26(y - 6) + 51(z + 3) = 0$

すなわち $26(y - 6) = -51(z + 3) \dots\dots [B]$

26と51は互いに素であるから、 $z + 3$ は26の倍数である。

ゆえに、 k を整数として、 $z + 3 = 26k$ と表される。

これを[B]に代入すると $y - 6 = -51k$

よって、③のすべての整数解は、 k を定数として $y = 6 - 51k, z = -3 + 26k$ と表される。

これを①に代入すると $7x + 13(6 - 51k) + 17(-3 + 26k) = 8$

ゆえに $7x = 221k - 19$

よって $x = \frac{221k - 19}{7} = \frac{(7 \cdot 31 + 4)k - 7 \cdot 3 + 2}{7} = 31k - 3 + \frac{4k + 2}{7}$

ゆえに、 x が整数になるための条件は、 $4k + 2$ が7の倍数になることである。

よって、 l を整数として $4k + 2 = 7l$ とおくと、 $k = 3, l = 2$ はこの等式を満たすから

$$4(k - 3) = 7(l - 2)$$

4 と 7 は互いに素であるから、 m を整数として、 $k-3=7m$ すなわち $k=7m+3$ と表される。

したがって、 x が整数になるのは、 k を 7 で割ったときの余りが $\text{ス}3$ のときである。

- (2) ⑦の左辺は 7 の倍数であるから、 k を整数として $-2-3a=7k \cdots \cdots [C]$ と表される。

$a=-3, k=1$ は $[C]$ を満たすから、 $[C]$ は $-3(a+3)=7(k-1)$ と変形できる。

3 と 7 は互いに素であるから、 l を整数として、 $a+3=7l$ と表される。

よって $a=7l-3=7(l-1)+4 \cdots \cdots [D]$

$[D]$ のとき、⑦は $5y+3z=1-3l$

$y=2, z=-3-l$ はこの方程式の解である。

したがって、 a を $\text{セ}7$ で割ったときの余りが $\text{ソ}4$ であることは、⑦を満たす整数 y, z が存在するための必要十分条件である。

- (3) $b=4m+n$ (m は整数, $n=0, 1, 2, 3$) に対し、 z の倍数 $3-5b$ は次のようになる。

	[1]	[2]	[3]	[4]
n	0	1	2	3
$3-5b$	$-20m+3$ $=-4 \cdot 5m+3$	$-20m-2$ $=-4(5m+1)+2$	$-20m-7$ $=-4(5m+2)+1$	$-20m-12$ $=-4(5m+3)$

$[2], [4]$ のとき、⑩の左辺、右辺をそれぞれ 4 で割ったときの余りの偶奇が異なるから、⑩を満たす整数 y, z は存在しない。

$[1]$ $b=4m$ のとき、⑩は $-4y+(3-20m)z=4m$

$y=-m, z=0$ はこの方程式の解である。

$[3]$ $b=4m+2$ のとき、⑩は $-4y-(20m+7)z=4m+2$

$y=9m+3, z=-2$ はこの方程式の解である。

以上から、 b を 4 で割った余りが $\text{タ}0$ または $\text{チ}2$ であることは、⑩を満たす整数 y, z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

- (4) ⑪ $\times c$ -⑫から x を消去すると $15y+(10-5c)z=3-c \cdots \cdots [E]$

$[E]$ の左辺は 5 の倍数であるから、 k を整数として、 $3-c=5k$ と表される。

よって $c=3-5k$

ゆえに、 $[E]$ は $3y+(5k-1)z=k \cdots \cdots [F]$

$k=3m+n$ (m は整数, $n=0, 1, 2$) に対し、 z の係数 $5k-1$ は次のようになる。

	[1]	[2]	[3]
n	0	1	2
$5k-1$	$15m-1$ $=3(5m-1)+2$	$15m+4$ $=3(5m+1)+1$	$15m+9$ $=3(5m+3)$

$[3]$ のとき、 $[F]$ の左辺、右辺をそれぞれ 3 で割ったときの余りが一致しないから、 $[F]$ を満たす整数 y, z は存在しない。

$[1]$ $k=3m$ のとき、 $[F]$ は $3y+(15m-1)z=3m$

$y=m, z=0$ はこの方程式の解である。

$[2]$ $k=3m+1$ のとき、 $[F]$ は $3y+(15m+4)z=3m+1$

$y=-4m-1, z=1$ はこの方程式の解である。

すなわち, [1], [2] のとき, [F] を満たす整数 y, z が存在する。

このとき, ⑪ から整数 x が定まる。

ここで $k=3m$ のとき $c=3-5\cdot 3m=-15m+3$

$k=3m+1$ のとき $c=3-5(3m+1)=-15m-2=-15(m+1)+13$

したがって, c を 15 で割ったときの余りが 3 , 13 であることは, ⑪ と ⑫ をとも満たす整数 x, y, z が存在するための必要十分条件である。

8

解説

(1) $\triangle ABC$ において, チェバの定理により

$$\frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$$

よって $\frac{BS}{SC} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1$

ゆえに $\frac{BS}{SC} = \frac{3}{4}$

すなわち $BS:SC=3:4$ ①

したがって, 点 S は辺 BC を $3:4$ に内分する点である。

$AB=5$ のとき, $AP:PB=2:3$ から $AP=2, PB=3$

円の外部の点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しいから

$$AQ=AP=2$$

また, $\triangle ABC$ の内接円と辺 BC の接点を U とすると

$$\begin{aligned} BC &= BU + CU = BP + CQ = BP + 2AQ \\ &= 3 + 4 = 7 \end{aligned}$$

ここで, ① より, $BS=3, SC=4$ であるから

$$BP=BS, CQ=CS$$

したがって, 点 S は $\triangle ABC$ の内接円と辺 BC との接点 U に一致する。 (オ ②)

(2) (i) $\triangle ABQ$ と直線 PC にメネラウスの定理

を用いると $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{QC}{CA} = 1$

よって $\frac{2}{3} \cdot \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{4}{5} = 1$

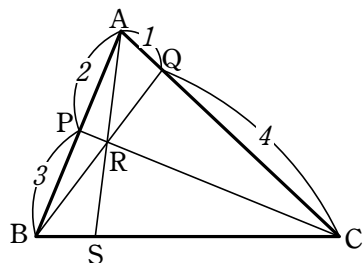
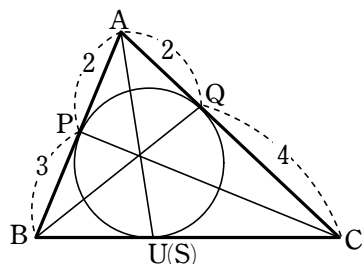
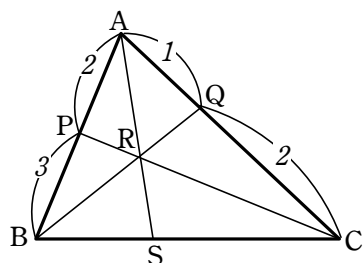
ゆえに $\frac{BR}{RQ} = \frac{15}{8}$

よって $RB:QR=15:8$

ゆえに, 点 R は, 線分 BQ を $15:8$ に内分する。

$\triangle APC$ と直線 BQ にメネラウスの定理を用いると $\frac{AB}{BP} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$

ゆえに $\frac{5}{3} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{4}{1} = 1$ よって $\frac{PR}{RC} = \frac{3}{20}$



ゆえに $CR : RP = 20 : 3$

よって、点 R は、線分 CP を ${}^{\text{ケ}}20 : {}^{\text{サ}}3$ に内分する。

また、 $\triangle BRC$ の面積を S とすると、 $CR : RP = 20 : 3$ であるから $\triangle BPR = \frac{3}{20}S$

$RB : QR = 15 : 8$ であるから $\triangle CQR = \frac{8}{15}S$

ゆえに $\frac{\triangle CQR \text{ の面積}}{\triangle BPR \text{ の面積}} = \frac{8}{15}S \div \frac{3}{20}S = \frac{\text{シス}32}{\text{セ}9}$

(ii) $AQ : QC = 1 : t$ として、 $\triangle ABQ$ と直線 PC に
メネラウスの定理を用いると

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{QC}{CA} = 1$$

よって $\frac{2}{3} \cdot \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{t}{t+1} = 1$

ゆえに $\frac{BR}{RQ} = \frac{3(t+1)}{2t} \dots\dots ①$

さらに、 $\triangle APC$ と直線 BQ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AB}{BP} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

よって $\frac{5}{3} \cdot \frac{PR}{RC} \cdot \frac{t}{1} = 1$ ゆえに $\frac{PR}{RC} = \frac{3}{5t} \dots\dots ②$

$\triangle BCR$ の面積を S とすると、② から、 $\triangle BPR$ の面積は $\frac{3}{5t}S$

① から、 $\triangle CQR$ の面積は $\frac{2t}{3(t+1)}S$

$\triangle CQR : \triangle BPR = 1 : 4$ であるから $\frac{2t}{3(t+1)}S : \frac{3}{5t}S = 1 : 4$

よって $\frac{3}{5t}S = \frac{8t}{3(t+1)}S$ ゆえに $40t^2 = 9(t+1)$

よって $40t^2 - 9t - 9 = 0$ ゆえに $(5t-3)(8t+3) = 0$

よって $t = \frac{3}{5}, -\frac{3}{8}$

$t > 0$ であるから $t = \frac{3}{5}$

ゆえに $AQ : QC = 1 : \frac{3}{5} = 5 : 3$

したがって、点 Q は辺 AC を ${}^{\text{ソ}}5 : {}^{\text{タ}}3$ に内分する点である。

