

$$\tau 1 - \sqrt{\tau} 2i, \frac{-\tau 4 \pm \sqrt{-5}i}{\tau 3}$$

2

解説

(1) 常用対数表によると, $\log_{10} 2.85 = 0.4548$ であるから

$$\begin{aligned} \log_{10} N_1 &= \log_{10} 285 = \log_{10} (2.85 \cdot 10^2) \\ &= \log_{10} 2.85 + \log_{10} 10^2 = 0.4548 + \tau 2 = 2.4548 \end{aligned}$$

この値の小数第 4 位を四捨五入したものを p_1 とすると $p_1 = 2.455$

常用対数表によると, $\log_{10} 3.68 = 0.5658$ であるから

$$\begin{aligned} \log_{10} N_2 &= \log_{10} 368 = \log_{10} (3.68 \cdot 10^2) \\ &= \log_{10} 3.68 + \log_{10} 10^2 = 0.5658 + 2 = 2.5658 \end{aligned}$$

この値の小数第 4 位を四捨五入したものを p_2 とすると $p_2 = \text{イ} 2.566$

さらに, $\log_{10} N_3$ の値の小数第 4 位を四捨五入したものを p_3 とすると,

$$\frac{p_2 - p_1}{25 - 22} = \frac{p_3 - p_2}{28 - 25} = 0.037 \text{ が成り立つことが確かめられるから, } k = 0.037 \text{ とする.}$$

N を正の実数とし, 点 $(x, \log_{10} N)$ が直線 $y = k(x - 22) + p_1$ …… ① 上にあるとき

$$\log_{10} N = k(x - 22) + p_1 \quad \text{すなわち} \quad \text{カ} N = 10^{k(x - 22) + p_1} \quad (\text{②})$$

(2) $x = 32$ のとき $N = 10^{0.037(32 - 22) + 2.455} = 10^{0.825} \cdot 10^2$

常用対数表によると, $\log_{10} 6.68 = 0.8248$, $\log_{10} 6.69 = 0.8254$ であるから

$$6.68 \cdot 10^2 < N < 6.69 \cdot 10^2 \quad \text{すなわち} \quad 668 < N < 669$$

したがって, N の値は $\text{キ} 660$ 以上 670 未満の範囲にある。(⑤)

3

解説

(1) ふたのない箱が作れるための x の条件は

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad 9 - 2x > 0 \quad \text{かつ} \quad 24 - 2x > 0$$

$$\text{すなわち} \quad x > 0 \quad \text{かつ} \quad x < \frac{9}{2} \quad \text{かつ} \quad x < 12$$

$$\text{よって, } x \text{ のとりうる値の範囲は} \quad 0 < x < \frac{\text{ア} 9}{\text{イ} 2}$$

$$\text{このとき} \quad V = (9 - 2x)(24 - 2x)x = \text{ウ} 4x^3 - \text{エオ} 66x^2 + \text{カキク} 216x$$

$$V \text{ を } x \text{ で微分すると} \quad V' = 12x^2 - 132x + 216 = 12(x^2 - 11x + 18) = 12(x - 2)(x - 9)$$

$$0 < x < \frac{9}{2} \text{ において, } V' = 0 \text{ となるのは, } x = 2 \text{ のとき}$$

である。

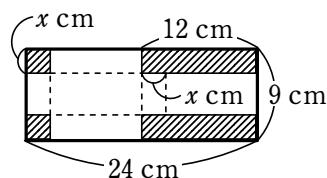
$$\text{よって, } 0 < x < \frac{9}{2} \text{ における } V \text{ の増減表は右のように}$$

なる。

したがって, V は $x = \text{ケ} 2$ で最大値 $\text{コサシ} 200$ をとる。

x	0	…	2	…	$\frac{9}{2}$
V'		+	0	−	
V		↗	極大 200	↘	

- (2) 右の図において、右側二つの斜線部分は、それぞれ縦の長さが x cm、横の長さが $\frac{1}{2} \times 12$ cm の長方形となる。(③)



ふたのある箱が作れるための条件は

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad 9 - 2x > 0 \quad \text{かつ} \quad 12 - x > 0$$

$$\text{すなわち} \quad x > 0 \quad \text{かつ} \quad x < \frac{9}{2} \quad \text{かつ} \quad x < 12$$

$$\text{よって、} x \text{ のとりうる値の範囲は} \quad 0 < x < \frac{9}{2}$$

$$\text{このとき} \quad W = (9 - 2x)(12 - x)x = \frac{1}{2}V$$

よって、 W も $x=2$ で最大値をとり、その値は V の最大値^セの $\frac{1}{2}$ 倍である。(④)

$x_0=2$ とするとき、 W が最大値をとる x は^ソただ一つあり、その値は x_0 と等しい。(②)

- (3) 縦の長さが p cm、横の長さが q cm の長方形の厚紙から (1), (2) と同じようにふたのない箱とふたのある箱を作るとする。

ふたのない箱を作る際に、図 1 と同様にして切り取る正方形の一辺の長さを x cm、箱の容積を V_1 とする。

ふたのない箱が作れるための条件は

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad p - 2x > 0 \quad \text{かつ} \quad q - 2x > 0$$

$$\text{すなわち} \quad x > 0 \quad \text{かつ} \quad x < \frac{p}{2} \quad \text{かつ} \quad x < \frac{q}{2}$$

よって、 x のとりうる値の範囲は

$$p \leq q \text{ のとき } 0 < x < \frac{p}{2}, \quad p \geq q \text{ のとき } 0 < x < \frac{q}{2}$$

$$\text{このとき} \quad V_1 = (p - 2x)(q - 2x)x$$

ふたのある箱を作る際に、図 2 と同様にして左側から 2 つ切り取る正方形の一辺の長さを x cm、箱の容積を W_1 とする。

ふたのある箱が作れるための条件は

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad p - 2x > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{q}{2} - x > 0$$

$$\text{すなわち} \quad x > 0 \quad \text{かつ} \quad x < \frac{p}{2} \quad \text{かつ} \quad x < \frac{q}{2}$$

よって、 x のとりうる値の範囲は

$$p \leq q \text{ のとき } 0 < x < \frac{p}{2}, \quad p \geq q \text{ のとき } 0 < x < \frac{q}{2}$$

$$\text{このとき} \quad W_1 = (p - 2x)\left(\frac{q}{2} - x\right)x = \frac{1}{2}V_1$$

したがって、ふたのある箱の容積の最大値が、ふたのない箱の容積の最大値の $\frac{1}{2}$ 倍であるということは、^タ縦と横の長さに関係なくどのような長方形のときでも成り立つ。

(④)

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int_t^{t+1} 1 dx &= \left[x \right]_t^{t+1} = (t+1) - t = {}^{\text{ア}}1 \\
 \int_t^{t+1} x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_t^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{2} - \frac{t^2}{2} = t + \frac{{}^{\text{イ}}1}{2} \\
 \int_t^{t+1} x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_t^{t+1} = \frac{(t+1)^3}{3} - \frac{t^3}{3} = t^2 + t + \frac{{}^{\text{エ}}1}{3}
 \end{aligned}$$

また, l, m, n を定数とし, $f(x) = lx^2 + mx + n$ とすると

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+1} f(x) dx &= \int_t^{t+1} (lx^2 + mx + n) dx \\
 &= l \left(t^2 + t + \frac{1}{3} \right) + m \left(t + \frac{1}{2} \right) + n \cdot 1 \\
 &= lt^2 + (l+m)t + \frac{1}{3}l + \frac{1}{2}m + n
 \end{aligned}$$

よって, $\int_t^{t+1} f(x) dx = t^2$ となるとき

$$t^2 = lt^2 + (l+m)t + \frac{1}{3}l + \frac{1}{2}m + n$$

$$\text{ゆえに} \quad 1 = l, \quad 0 = l + m, \quad 0 = \frac{1}{3}l + \frac{1}{2}m + n$$

$$\text{これを解くと} \quad l = {}^{\text{カ}}1, \quad m = {}^{\text{キ}}-1, \quad n = {}^{\text{ク}}\frac{1}{6}$$

$$(2) \quad (1) \text{ から } \int_t^{t+1} f(x) dx = t^2$$

$$\text{よって} \quad \int_1^2 f(x) dx = 1^2$$

$$\int_2^3 f(x) dx = 2^2$$

.....

$$\int_{10}^{11} f(x) dx = 10^2$$

したがって

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \cdots + \int_{10}^{11} f(x) dx = \int_1^{\text{サシ}} f(x) dx$$

5

解説

(1) 箱 A, B からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に取り出す方法は $4^2 = 16$ (通り)
 $X=1$ となるのは, 次の [1], [2], [3] のいずれかである。

[1] 白のカード, 赤のカードともに 1 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)

[2] 白のカードが 1 で赤のカードが 2 以上のとき ${}_1C_1 \times {}_3C_1 = 3$ (通り)

[3] 赤のカードが 1 で白のカードが 2 以上のとき ${}_1C_1 \times {}_3C_1 = 3$ (通り)

よって, $X=1$ となるのは, 全部で $1 + 3 + 3 = {}^{\text{ア}}7$ (通り)

$X=2$ となるのは, 次の [1], [2], [3] のいずれかである。

- [1] 白のカード, 赤のカードともに 2 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- [2] 白のカードが 2 で赤のカードが 3 以上のとき ${}_1C_1 \times {}_2C_1 = 2$ (通り)
- [3] 赤のカードが 2 で白のカードが 3 以上のとき ${}_1C_1 \times {}_2C_1 = 2$ (通り)
- よって, $X=2$ となるのは, 全部で $1+2+2=5$ (通り)
- $X=3$ となるのは, 次の [1], [2], [3] のいずれかである。
- [1] 白のカード, 赤のカードともに 3 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- [2] 白のカードが 3 で赤のカードが 4 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- [3] 赤のカードが 3 で白のカードが 4 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- よって, $X=3$ となるのは, 全部で $1+1+1=3$ (通り)
- $X=4$ となるのは, 白のカード, 赤のカードともに 4 のときであるから
- $${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1 \text{ (通り)}$$

ゆえに, X の確率分布は次のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$Y=1$ となるのは, 白のカード, 赤のカードともに 1 のときであるから

$${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1 \text{ (通り)}$$

$Y=2$ となるのは, 次の [1], [2], [3] のいずれかである。

- [1] 白のカード, 赤のカードともに 2 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- [2] 白のカードが 2 で赤のカードが 1 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- [3] 赤のカードが 2 で白のカードが 1 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- よって, $Y=2$ となるのは, 全部で $1+1+1=3$ (通り)
- $Y=3$ となるのは, 次の [1], [2], [3] のいずれかである。
- [1] 白のカード, 赤のカードともに 3 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- [2] 白のカードが 3 で赤のカードが 2 以下のとき ${}_1C_1 \times {}_2C_1 = 2$ (通り)
- [3] 赤のカードが 3 で白のカードが 2 以下のとき ${}_1C_1 \times {}_2C_1 = 2$ (通り)
- よって, $Y=3$ となるのは, 全部で $1+2+2=5$ (通り)
- $Y=4$ となるのは, 次の [1], [2], [3] のいずれかである。
- [1] 白のカード, 赤のカードともに 4 のとき ${}_1C_1 \times {}_1C_1 = 1$ (通り)
- [2] 白のカードが 4 で赤のカードが 3 以下のとき ${}_1C_1 \times {}_3C_1 = 3$ (通り)
- [3] 赤のカードが 4 で白のカードが 3 以下のとき ${}_1C_1 \times {}_3C_1 = 3$ (通り)
- よって, $Y=4$ となるのは, 全部で $1+3+3=7$ (通り)
- ゆえに, Y の確率分布は次のようになる。

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

確率変数 Z を $Z = 5 - X$ とすると, Z の確率分布は次のようになり, Z の確率分布と Y の確率分布は同じである。

Z	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

$$(2) \quad E(X) = 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{3}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{\text{ケコ} 15}{8}$$

(1) から

$$E(Y) = E(Z) = E(5 - X) = 5 - E(X) = 5 - \frac{15}{8} = \frac{\text{サシ} 25}{8}$$

$$\sigma(Y) = \sigma(5 - X) = |-1| \sigma(X) = \sigma(X) \quad (\text{㉓})$$

$$(3) \quad (i) \quad P(\bar{X} = 2.50) = P(X_1 + X_2 = 5)$$

このときの X_1, X_2 の値の組合せは次の 4 つの場合がある。

$$(X_1, X_2) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$$

(1) の X の確率分布より

$$P((X_1, X_2) = (1, 4)) = \frac{7}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{7}{256}$$

$$P((X_1, X_2) = (2, 3)) = \frac{5}{16} \times \frac{3}{16} = \frac{15}{256}$$

$$P((X_1, X_2) = (3, 2)) = \frac{3}{16} \times \frac{5}{16} = \frac{15}{256}$$

$$P((X_1, X_2) = (4, 1)) = \frac{1}{16} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{256}$$

よって

$$\begin{aligned} P(\bar{X} = 2.50) &= P(X_1 + X_2 = 5) \\ &= P((X_1, X_2) = (1, 4)) + P((X_1, X_2) = (2, 3)) + P((X_1, X_2) = (3, 2)) \\ &\quad + P((X_1, X_2) = (4, 1)) \\ &= \frac{7}{256} + \frac{15}{256} + \frac{15}{256} + \frac{7}{256} = \frac{\text{セソ} 11}{64} \end{aligned}$$

また

$$P(\bar{Y} = 2.50) = P(Y_1 + Y_2 = 5)$$

このときの Y_1, Y_2 の値の組合せは次の 4 つの場合がある。

$$(Y_1, Y_2) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$$

(1) の Y の確率分布より

$$P((Y_1, Y_2) = (1, 4)) = \frac{1}{16} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{256}$$

$$P((Y_1, Y_2) = (2, 3)) = \frac{3}{16} \times \frac{5}{16} = \frac{15}{256}$$

$$P((Y_1, Y_2) = (3, 2)) = \frac{5}{16} \times \frac{3}{16} = \frac{15}{256}$$

$$P((Y_1, Y_2) = (4, 1)) = \frac{7}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{7}{256}$$

よって

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} = 2.50) &= P(Y_1 + Y_2 = 5) \\ &= P((Y_1, Y_2) = (1, 4)) + P((Y_1, Y_2) = (2, 3)) + P((Y_1, Y_2) = (3, 2)) \end{aligned}$$

$$+P((Y_1, Y_2)=(4, 1))$$

$$=\frac{7}{256}+\frac{15}{256}+\frac{15}{256}+\frac{7}{256}=\frac{11}{64}$$

$$\text{ゆえに} \quad P(\overline{Y}=2.50)^{\ast}=P(\overline{X}=2.50) \quad (\textcircled{1})$$

(ii) n が大きいとき, $\overline{X}$ は近似的に $N(E(\overline{X}), \{\sigma(\overline{X})\}^2)$ に従い, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ で

ある。(②)

$n=100$ は大きいから, $\overline{X}=2.95$ であったとすると, 推定される母平均を m_X として,

$$m_X \text{ の信頼度 } 95 \% \text{ の信頼区間は} \quad 2.95-1.96 \cdot \frac{\frac{\sqrt{55}}{8}}{\sqrt{100}} \leq m_X \leq 2.95+1.96 \cdot \frac{\frac{\sqrt{55}}{8}}{\sqrt{100}}$$

$$\text{よって} \quad \textcircled{\text{ツ}} 2.769 \leq m_X \leq \textcircled{\text{テ}} 3.131 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (\textcircled{4}, \textcircled{7})$$

一方, $n=100$ は大きいから, $\overline{Y}=2.95$ であったとすると, 推定される母平均を m_Y として, m_Y の信頼度 95 % の信頼区間は

$$2.95-1.96 \cdot \frac{\frac{\sqrt{55}}{8}}{\sqrt{100}} \leq m_Y \leq 2.95+1.96 \cdot \frac{\frac{\sqrt{55}}{8}}{\sqrt{100}}$$

$$\text{よって} \quad \textcircled{\text{ト}} 2.769 \leq m_Y \leq \textcircled{\text{ナ}} 3.131 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad (\textcircled{4}, \textcircled{7})$$

$E(X)\left(=\frac{15}{8}=1.875\right)$ は①の信頼区間に^ニ含まれていない。(①)

$E(Y)\left(=\frac{25}{8}=3.125\right)$ は②の信頼区間に^ヌ含まれている。(②)

以上から, 太郎さんの記憶については, ^ネ正しくないと判断され, メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 Y 」の平均値である。(①)

6

解説

(1) $a_{n+1}-a_n=-3$ より, 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=23$, 公差 -3 の等差数列であるから

$$a_n=23+(n-1) \cdot (-3)=\textcircled{\text{アイ}}-3n+\textcircled{\text{ウエ}}26$$

$$a_n < 0 \text{ とすると} \quad -3n+26 < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad n > \frac{26}{3}$$

よって, $a_n < 0$ を満たす最小の自然数 n は^オ9である。

$$\text{また, すべての自然数 } n \text{ について} \quad a_n-a_{n+1}=3 > 0$$

よって, 数列 $\{a_n\}$ は, すべての自然数 n について $a_n > a_{n+1}$ となるから, 数列 $\{a_n\}$ は^カつねに減少する。(①)

また, 自然数 n に対して, $S_n=\sum_{k=1}^n a_k$ とするとき, $1 \leq n \leq 8$ を満たす自然数 n について

$a_n > 0$, $n \geq 9$ を満たす自然数 n について $a_n < 0$ であるから, 数列 $\{S_n\}$ は,

$1 \leq n \leq 7$ を満たす自然数 n について $S_n < S_{n+1}$ となり, $n \geq 8$ を満たす自然数 n について $S_n > S_{n+1}$ となる。

よって、数列 $\{S_n\}$ は $\ast$ 増加することも減少することもある。(②)

ここで、 $n \geq 9$ のとき、 $\gamma a_n < 0$ である。(⑩)

よって、 $b_n = \frac{1}{a_n}$ とすると、 $n \geq 9$ のとき

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} = \frac{3}{a_{n+1}a_n} > 0$$

したがって、 $n \geq 9$ のとき、 $\gamma b_n < b_{n+1}$ である。(⑪)

$$(2) \quad d_n = \frac{1}{c_n - 20} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \text{ とすると} \quad d_1 = \frac{1}{c_1 - 20} = \frac{1}{30 - 20} = \frac{1}{\text{コサ}10}$$

$$\text{また、} d_n \neq 0 \text{ であるから} \quad \frac{1}{d_n} = c_n - 20 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{すなわち} \quad c_n = \frac{1}{d_n} + \text{シス}20 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots ①$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{d_{n+1}} = c_{n+1} - 20 = \frac{50c_n - 800}{c_n - 10} - 20$$

$$= \frac{50\left(\frac{1}{d_n} + 20\right) - 800}{\left(\frac{1}{d_n} + 20\right) - 10} - 20 = \frac{200d_n + 50}{10d_n + 1} - 20 = \frac{30}{10d_n + 1}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{ゆえに} \quad d_{n+1} = \frac{10d_n + 1}{30} = \frac{d_n}{\text{セ}3} + \frac{1}{\text{ソタ}30} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{変形すると} \quad d_{n+1} - \frac{1}{20} = \frac{1}{3}\left(d_n - \frac{1}{20}\right)$$

$$\text{また} \quad d_1 - \frac{1}{20} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$$

よって、数列 $\left\{d_n - \frac{1}{20}\right\}$ は初項 $\frac{1}{20}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で

$$d_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad d_n = \frac{1}{\text{チツ}20}\left(\frac{1}{\text{テ}3}\right)^{n-1} + \frac{1}{\text{トナ}20}$$

$$\text{ゆえに} \quad d_n \overset{ニ}{>} \frac{1}{20} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (⑫)$$

また、すべての自然数 n について

$$d_n - d_{n+1} = \left\{\frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{20}\right\} - \left\{\frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)-1} + \frac{1}{20}\right\} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$$

よって、数列 $\{d_n\}$ は、すべての自然数 n について $d_n > d_{n+1}$ となるから、数列 $\{d_n\}$ は ヌ つねに減少する。(⑬)

$$\text{また、} d_n > \frac{1}{20} \text{ より } \frac{1}{d_n} < 20 \text{ であるから} \quad c_n = \frac{1}{d_n} + 20 < 20 + 20 = 40$$

さらに、数列 $\left\{\frac{1}{d_n}\right\}$ はつねに増加するから、① より、数列 $\{c_n\}$ もつねに増加する。

したがって、O を原点とする座標平面上に $n=1$ から $n=10$ まで点 (n, c_n) を図示すると ネ ⑭ となる。

参考 $d_n = \frac{1}{20} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{20}$ であるから, $c_n = \frac{1}{d_n} + 20$ より, $c_n = \frac{40 \cdot 3^{n-1} + 20}{3^{n-1} + 1}$ となる。

7

解説

(1) $\overrightarrow{OA} = (0, -3, 5)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 0, 4)$ であるから

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 0, 4) - (0, -3, 5) = (2, 3, -1)$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (0, -3, 5) + t(2, 3, -1) = (2t, 3t-3, -t+5)$$

ゆえに, 点 P の座標は $(^{\text{ア}}2t, ^{\text{イ}}3t-^{\text{ウ}}3, -t+^{\text{エ}}5)$

点 P が xy 平面上にあるとき $-t+5=0$ すなわち $t=5$

よって, 点 C の座標は $(^{\text{オカ}}10, ^{\text{キク}}12, 0)$

点 A の z 座標は 5, 点 B の z 座標は 4, 点 C の z 座標は 0 であるから, 点 C は線分 AB を $^{\text{ケ}}5: ^{\text{コ}}4$ に外分する。

(2) $\angle CPD = 120^\circ$ のとき $\cos \angle CPD = -\frac{1}{2}$

$$\text{よって } \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = |\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{PD}| \cos \angle CPD = \frac{\text{サシ}}{\text{ス2}} |\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{PD}| \dots\dots ①$$

$\overrightarrow{PC} \parallel \overrightarrow{AB}$ であるから, 0 でない実数 k を用いて $\overrightarrow{PC} = k\overrightarrow{AB}$ と表すと

$$k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PD} = -\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{PD}| \dots\dots ②$$

ここで, $\overrightarrow{OD} = (7, 4, 5)$ であるから

$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OP} = (7, 4, 5) - (2t, 3t-3, -t+5) = (7-2t, 7-3t, t)$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PD} = 2 \times (7-2t) + 3 \times (7-3t) + (-1) \times t = -14t + 35 = -7(^{\text{セ}}2t - ^{\text{ソ}}5)$$

$$|\overrightarrow{PD}|^2 = (7-2t)^2 + (7-3t)^2 + t^2 = 14t^2 - 70t + 98 = 14(t^2 - ^{\text{タ}}5t + ^{\text{チ}}7)$$

② について, $(k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PD})^2 = \left(-\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{PD}| \right)^2$ が成り立つならば,

$$k^2 (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PD})^2 = \frac{1}{4} k^2 |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{PD}|^2 \text{ が成り立つ。}$$

$$k \neq 0 \text{ であるから } (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PD})^2 = \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{PD}|^2$$

$$\text{よって } \{-7(2t-5)\}^2 = \frac{1}{4} \{2^2 + 3^2 + (-1)^2\} \times 14(t^2 - 5t + 7)$$

$$\text{変形すると } t^2 - 5t + 6 = 0 \quad \text{すなわち } (t-2)(t-3) = 0$$

$$\text{これを解くと } t = ^{\text{ツ}}2, ^{\text{テ}}3$$

[1] $t=2$ のとき

$$\overrightarrow{OC} = (10, 12, 0), \overrightarrow{OP} = (4, 3, 3) \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = (10, 12, 0) - (4, 3, 3) = (6, 9, -3)$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{6^2 + 9^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{14}$$

$$\text{また, } \overrightarrow{PD} = (3, 1, 2) \text{ であるから}$$

$$|\overrightarrow{PD}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 6 \times 3 + 9 \times 1 + (-3) \times 2 = 21$$

$$\text{ゆえに} \quad \cos \angle CPD = \frac{\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{PD}|} = \frac{21}{3\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \angle CPD \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \angle CPD = 60^\circ$$

[2] $t=3$ のとき

$$\overrightarrow{OC} = (10, 12, 0), \overrightarrow{OP} = (6, 6, 2) \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = (10, 12, 0) - (6, 6, 2) = (4, 6, -2)$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{14}$$

$$\text{また, } \overrightarrow{PD} = (1, -2, 3) \text{ であるから}$$

$$|\overrightarrow{PD}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 4 \times 1 + 6 \times (-2) + (-2) \times 3 = -14$$

$$\text{ゆえに} \quad \cos \angle CPD = \frac{\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{PD}|} = \frac{-14}{2\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ \leq \angle CPD \leq 180^\circ \text{ であるから} \quad \angle CPD = 120^\circ$$

よって, $\angle CPD = 120^\circ$ となるのは $t=3$ のときであり, このとき $\overrightarrow{OP} = (6, 6, 2)$ である。

したがって, $\angle CPD = 120^\circ$ となる点 P の座標は $({}^{\text{ト}}6, {}^{\text{ナ}}6, {}^{\text{ニ}}2)$

(3) 点 P は直線 AB から点 A を除いた部分にあるから $t \neq 0$

$$\text{ここで} \quad \overrightarrow{DP} = -\overrightarrow{PD} = -(7-2t, 7-3t, t) = (2t-7, 3t-7, -t)$$

点 Q が直線 DP 上にあることから, $\overrightarrow{OQ}$ は実数 s を用いて次のように表すことができる。

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{DP}$$

$$= (7, 4, 5) + s(2t-7, 3t-7, -t)$$

$$= (7+s(2t-7), 4+s(3t-7), 5-st)$$

$$\text{点 Q は } xy \text{ 平面上にあるから} \quad 5-st=0$$

$$t \neq 0 \text{ であるから} \quad s = \frac{5}{t}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OQ} = \left(7 + \frac{5}{t}(2t-7), 4 + \frac{5}{t}(3t-7), 0 \right)$$

$$= ({}^{\text{ヌ}}17, {}^{\text{ノ}}19, 0) - \frac{{}^{\text{ヒ}}35}{t}(1, 1, 0)$$

t が 0 以外の実数値を変化するとき $\frac{1}{t}$ は 0 以外のすべての実数値をとるから,

点 $(17, 19, 0)$ を R とすると, 点 Q は, 点 R を通り, 方向ベクトルが $(1, 1, 0)$ の直線のうち, 点 R を除いた部分を描く。

$$\overrightarrow{OR} = (17, 19, 0) \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OD} = (17, 19, 0) - (7, 4, 5)$$

$$= (10, 15, -5) = 5(2, 3, -1) = 5\overrightarrow{AB}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{DR} \parallel \overrightarrow{AB} \quad (\textcircled{4})$$