

1 [2025 京都大]

次の定積分を求めよ。

(i)
$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x^3+1}{x^2+1} dx$$

(ii)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} dx$$

2 [2025 北海道大]

α, r を $\alpha > 1, r > 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ で公比が r の等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(1) b_n を n と $\log_{\alpha} r$ を用いて表せ。

(2) 等式 $b_n = \frac{n+2}{n+1}$ がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ。

(3) (2) の条件が成り立つとき、積 $a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_3 a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁, 3 桁, 4 桁になるような α の範囲を求めよ。

3 [2025 神戸大]

媒介変数 θ を用いて

$$x = \sin \theta, \quad y = \cos \theta + |\sin \theta| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 [2025 京都大]

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ。