

1 [2017 鹿児島大]

(解説)

(1) 曲線 C_1 上の点 $P(3\cos\theta, \sin\theta)$ における接線 ℓ の方程式は

$$\frac{3\cos\theta}{3^2}x + (\sin\theta)y = 1 \quad \text{すなわち} \quad x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3$$

この式に $y=2$ を代入して $x\cos\theta + 6\sin\theta = 3$ 点 P は第1象限にあるから $\cos\theta \neq 0$

$$\text{よって} \quad x = \frac{3 - 6\sin\theta}{\cos\theta}$$

したがって、点 Q の座標は $\left(\frac{3 - 6\sin\theta}{\cos\theta}, 2\right)$ (2) $\triangle POQ$ の面積を S_1 とすると、 S_1 は右の図の斜線部分の面積である。接線 ℓ と x 軸との交点を R とすると、点 R の座標は

$$(1) \text{ から } \left(\frac{3}{\cos\theta}, 0\right)$$

ゆえに $S_1 = \triangle QOR - \triangle POR$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\cos\theta} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\cos\theta} \cdot \sin\theta \\ &= \frac{3(2 - \sin\theta)}{2\cos\theta} \end{aligned}$$

$$f(\theta) = \frac{2 - \sin\theta}{\cos\theta} \text{ とすると}$$

$$f'(\theta) = \frac{-\cos\theta \cdot \cos\theta - (2 - \sin\theta) \cdot (-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ において } f'(\theta) = 0 \text{ とすると } \theta = \frac{\pi}{6}$$

よって、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の増減表は

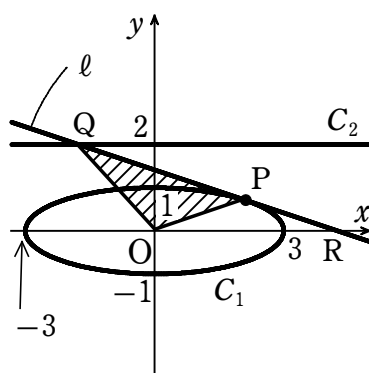
右のようになる。

ゆえに、 $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{6}$ で極小かつ最小となる。

る。

したがって、 S_1 が最小になるのは $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときで、このとき、点 P の座標は

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



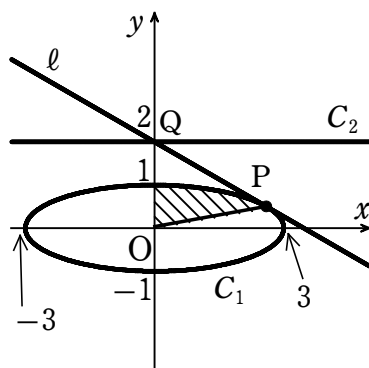
θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

また、接線 ℓ の方程式は (1) から $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 3$

すなわち $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

(3) $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、点 Q の座標は (0, 2)

求める面積を S_2 とすると、 S_2 は右の図の斜線部分の面積である。



よって $S_2 = \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} y dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} y \cdot \frac{dx}{d\theta} d\theta - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin \theta \cdot (-3 \sin \theta) d\theta - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{2}$$

x	$0 \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$
θ	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6}$

別解 y 軸方向に 3 倍して考える。

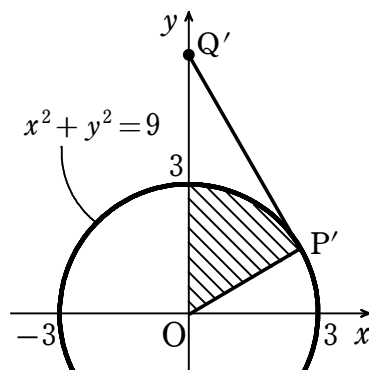
このとき、2 点 P, Q はそれぞれ $P' \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \right)$,

$Q'(0, 6)$ に移り、曲線 C_1 は円 $x^2 + y^2 = 9$ に移る。

右の図の斜線部分の面積は、 $\angle P'OQ' = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \pi$$

したがって、求める面積は $\frac{3}{2} \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$



2 [2017 神戸大]

(解説)

- (1) 正四面体のさいころを2回振ったとき、点 P_2 が x 軸上にあるのは、出た目が1と2 または3と4のときであり、このとき点 P_2 の座標はそれぞれ $(2, 0, 0)$, $(-2, 0, 0)$ である。

よって、求める確率は $\frac{2!}{4^2} \times 2 = \frac{1}{4}$

- (2) 位置 P_m から、さいころを2回振ったときの $\overrightarrow{P_m P_{m+2}}$ について、以下の場合に分けることができる。それぞれの確率を考える。

[1] $\overrightarrow{P_m P_{m+2}} = (a, 0, 0)$ となるとき

(1) の場合であるから $\frac{1}{4}$

[2] $\overrightarrow{P_m P_{m+2}} = (0, b, 0)$ となるとき

出た目が1と3または2と4のときであり、このとき

$$\overrightarrow{P_m P_{m+2}} = (0, 2, 0), (0, -2, 0)$$

よって $\frac{2!}{4^2} \times 2 = \frac{1}{4}$

[3] $\overrightarrow{P_m P_{m+2}} = (0, 0, c)$ となるとき

出た目が1と4または2と3のときであり、このとき

$$\overrightarrow{P_m P_{m+2}} = (0, 0, 2), (0, 0, -2)$$

よって $\frac{2!}{4^2} \times 2 = \frac{1}{4}$

[4] $\overrightarrow{P_m P_{m+2}} = 2\vec{v}_k$ となるとき

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{4}$$

$\overrightarrow{P_0 P_2} \perp \overrightarrow{P_2 P_4}$ となるのは、 $\overrightarrow{P_0 P_2}$ と $\overrightarrow{P_2 P_4}$ が [1], [2], [3] のうち異なる2つである場合であるから、求める確率は ${}_3P_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}$

- (3) 4点 P_0, P_1, P_2, P_3 が同一平面上にあるのは次の場合がある。

- [1] 同じ目が3回連続で出る、すなわち4点が同一直線上にあるとき

$$4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{16}$$

- [2] 3回のうち2回同じ目が出る、すなわち4点が同一平面上にあり、同一直線上にな

いとき ${}_4C_2 \times 2 \times \frac{3!}{2!1!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

[1], [2] から, 求める確率は $\frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{5}{8}$

(4) $\vec{v}_k$ を 6 個以下加えたときに $\vec{0}$ となるのは, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{0}$ のときのみである。

よって, $P_n = 0$ となるのは, $n = 4$ のときであり, 四面体のさいころを 4 回振って 4 回とも異なる目が出るときのみである。

したがって, 求める確率は

$n = 1, 2, 3, 5, 6$ のとき 0

$n = 4$ のとき $\frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}$

3 [1999 京都大]

解説

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - 2|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\angle APB$$

ゆえに、 $a > 0$ として $|\overrightarrow{AB}| = 2a$ とおくと、条件から

$$\begin{aligned} 4a^2 &= |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \\ &= |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - 2(c - |\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|) \\ &= (|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}|)^2 - 2c \end{aligned}$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{4a^2 + 2c}$$

したがって、点 P の軌跡は、2 点 A, B を焦点とし、短軸の長さが

$$2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{4a^2 + 2c}}{2}\right)^2 - a^2} = \sqrt{2c} \text{ の楕円である.}$$

4 [2017 大阪大]

(解説)

(1) $0 \leq f(1) \leq 2, 5 \leq f(3) \leq 6$ より

$$0 \leq -1 + b + c \leq 2, 5 \leq -9 + 3b + c \leq 6$$

すなわち

$$-b + 1 \leq c \leq -b + 3,$$

$$-3b + 14 \leq c \leq -3b + 15$$

これらの不等式が表す領域 D を bc 平面上に図示すると、右の図の斜線部分である。

ここで、 $f(4) = -16 + 4b + c$ より、

$$-16 + 4b + c = k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、これは bc 平面上において、傾き

-4 、 c 切片 $k+16$ の直線を表す。

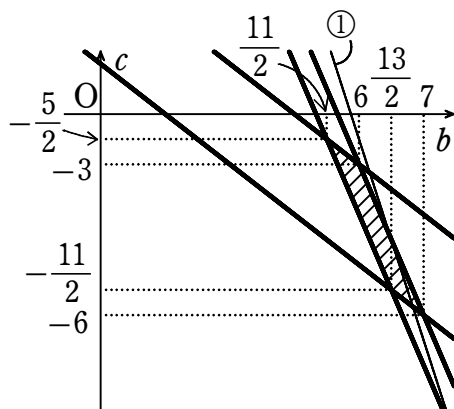
この直線 $\textcircled{1}$ が領域 D と共有点をもつような

k のとりうる値の範囲を求めればよい。

c 切片 $k+16$ は、直線 $\textcircled{1}$ が $(7, -6)$ を通るとき最大となり、 $(\frac{11}{2}, -\frac{5}{2})$ を通るとき

最小となるから、 $\textcircled{1}$ より $-16 + 4 \cdot \frac{11}{2} + (-\frac{5}{2}) \leq k \leq -16 + 4 \cdot 7 + (-6)$

すなわち $\frac{7}{2} \leq k \leq 6$ したがって $\frac{7}{2} \leq f(4) \leq 6$



$$(2) \quad y = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} + c$$

よって、放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 q は $q = \frac{b^2}{4} + c$

ゆえに $c = -\frac{b^2}{4} + q \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

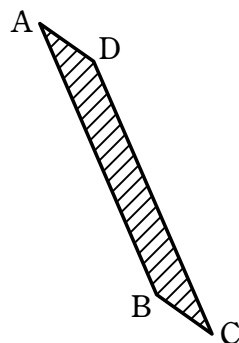
$\textcircled{2}$ は bc 平面上において、頂点の座標が $(0, q)$ で、上に凸の放物線を表す。

この放物線 $\textcircled{2}$ が領域 D と共有点をもつような q のとりうる値の範囲を求めればよい。

ここで、領域 D が表す四角形の各頂点を、右のように A, B, C, D とする。

[1] 放物線 $\textcircled{2}$ が点 A $(\frac{11}{2}, -\frac{5}{2})$ を通るとき

$$q = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{81}{16}$$



[2] 放物線②が点 B $\left(\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ を通るとき

$$q = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{81}{16}$$

[3] 放物線②が点 C (7, -6) を通るとき

$$q = \frac{1}{4} \cdot 7^2 + (-6) = \frac{25}{4}$$

[4] 放物線②が点 D (6, -3) を通るとき

$$q = \frac{1}{4} \cdot 6^2 + (-3) = 6$$

[5] 放物線②が線分 AB に接するとき

b についての 2 次方程式 $-\frac{b^2}{4} + q = -3b + 14$ すなわち $b^2 - 12b - 4q + 56 = 0$ の判別

式を D_1 とすると $\frac{D_1}{4} = (-6)^2 - 1 \cdot (-4q + 56) = 4q - 20$

$D_1 = 0$ から $4q - 20 = 0$ よって $q = 5$

このとき、接点の b 座標は 6 で、接点は線分 AB 上にある。

[6] 放物線②が線分 BC に接するとき

b についての 2 次方程式 $-\frac{b^2}{4} + q = -b + 1$ すなわち $b^2 - 4b - 4q + 4 = 0$ の判別式を

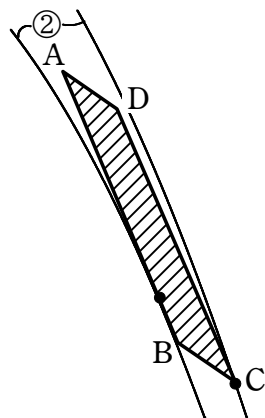
D_2 とすると $\frac{D_2}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot (-4q + 4) = 4q$

$D_2 = 0$ から $4q = 0$ よって $q = 0$

このとき、接点の b 座標は 2 で、接点は線分 BC 上にな
いから不適。

[1] ~ [6] で求めた q の値のうち、最小値は 5, 最大値は $\frac{25}{4}$
である。

したがって、 q のとりうる値の範囲は $5 \leq q \leq \frac{25}{4}$



(3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき $y = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + 6$

この放物線と x 軸の交点の x 座標は、 $-\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + 6 = 0$ を解くと $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{6}$

$\alpha = \frac{b}{2} - \sqrt{6}$, $\beta = \frac{b}{2} + \sqrt{6}$ とおくと, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + 6 \right\} dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{b}{2} + \sqrt{6}\right) - \left(\frac{b}{2} - \sqrt{6}\right) \right\}^3 = \frac{1}{6} \cdot (2\sqrt{6})^3 \\ &= 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

