

1 [2015 岐阜大]

(解説)

(1) $f(x) = e^{-x}$ から $f'(x) = -e^{-x}$

よって、点 $(t, f(t))$ における曲線 C の接線の方程式は

$$y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -e^{-t}x + (t+1)e^{-t}$$

$$y=0 \text{ とすると } x=t+1 \quad \text{よって} \quad P(t+1, 0)$$

$$x=0 \text{ とすると } y=(t+1)e^{-t} \quad \text{よって} \quad Q(0, (t+1)e^{-t})$$

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ = \frac{1}{2}(t+1) \cdot (t+1)e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$$

$$\text{よって} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 2(t+1)e^{-t} + \frac{1}{2}(t+1)^2 \cdot (-e^{-t})$$

$$= -\frac{1}{2}(t+1)(t-1)e^{-t}$$

$t > 0$ における S の増減は右のようになる。

よって、 S は $t=1$ で最大値 $\frac{2}{e}$ をとる。

このとき、2点 $P(2, 0)$, $Q\left(0, \frac{2}{e}\right)$ を通る直線 ℓ の

$$\text{方程式は} \quad y = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$$

(3) $y = e^{-x}$ から $x = -\log y$

求める体積 V は、右の図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積であるから

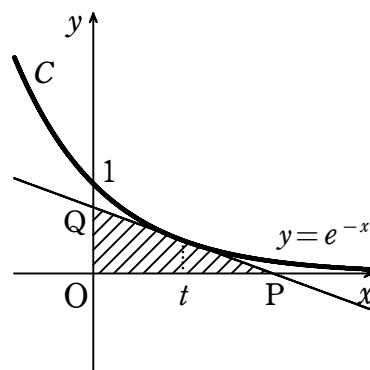
$$V = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\log y)^2 dy - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{e}\right)$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (\log y)^2 dy - \frac{\pi}{3e}$$

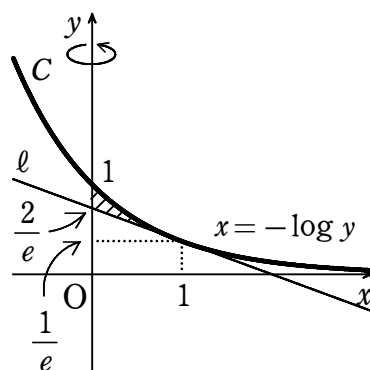
$$\text{ここで} \quad \int (\log y)^2 dy = \int (y)' (\log y)^2 dy$$

$$= y(\log y)^2 - \int y \cdot 2 \log y \cdot \frac{1}{y} dy$$

$$= y(\log y)^2 - 2 \int (y)' \log y dy$$



t	0	...	1	...
$\frac{dS}{dt}$		+	0	-
S		↗	極大	↘



$$\begin{aligned}
&= y(\log y)^2 - 2\left(y \log y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy\right) \\
&= y(\log y)^2 - 2(y \log y - y) + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって} \quad V &= \pi \left[y(\log y)^2 - 2y(\log y - 1) \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \frac{\pi}{3e} \\
&= \pi \left[-2 \cdot (-1) - \left\{ \frac{1}{e} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot \frac{1}{e} \cdot (-2) \right\} - \frac{1}{3e} \right] \\
&= \left(2 - \frac{16}{3e} \right) \pi
\end{aligned}$$

2 [2015 神戸大]

(解説)

3 辺の長さが a, b, c である三角形を X , 3 辺の長さが $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ である三角形を Y とする。

(1) $a = b > c$ のとき, a, a, c のうち最大のものが a であり, $a + c > a$ が成り立つから, X は常に存在する。

また, $\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{c}$ のうち最大のものは $\frac{1}{c}$ であるから, Y が存在するための条件は

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} > \frac{1}{c} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a}{2} < c$$

よって, X と Y が両方とも存在するための条件は $\frac{a}{2} < c < a$

これを満たす a, c の組は

$$(a, c) = (3, 2), (4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6)$$

ゆえに, 求める a, b, c の組は 9 個である。

(2) $a > b > c$ …… ① であるから, X が存在するための条件は $b + c > a$ …… ②

① より, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$ であるから, Y が存在するための条件は $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

両辺に abc (> 0) を掛けると $bc + ca > ab$

すなわち $bc > a(b - c)$ …… ③

[1] $a = 7$ のとき ① から $7 > b > c$

② から $b + c > 7$

③ から $bc > 7(b - c)$

よって, この 3 つの不等式を満たす b, c の組は

$(b, c) = (6, 5), (6, 4), (5, 4), (5, 3)$ の 4 個である。

[2] $a = 6$ のとき ① から $6 > b > c$

$$\textcircled{2} \text{ から } b+c>6$$

$$\textcircled{3} \text{ から } bc>6(b-c)$$

よって、この3つの不等式を満たす b, c の組は

$(b, c)=(5, 4), (5, 3), (4, 3)$ の3個である。

$$[3] \ a=5 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ から } 5>b>c$$

$$\textcircled{2} \text{ から } b+c>5$$

$$\textcircled{3} \text{ から } bc>5(b-c)$$

よって、この3つの不等式を満たす b, c の組は $(b, c)=(4, 3)$ の1個である。

$$[4] \ a=4 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ から } 4>b>c$$

$$\textcircled{2} \text{ から } b+c>4$$

$$\textcircled{3} \text{ から } bc>4(b-c)$$

よって、この3つの不等式を満たす b, c の組は $(b, c)=(3, 2)$ の1個である。

$$[5] \ a=3 \text{ のとき}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } 3>b>c \quad \text{よって } b=2, c=1$$

このとき、 $b+c=a$ であるから、 $\textcircled{2}$ を満たさない。

$$[6] \ a\leq 2 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ を満たす } b, c \text{ は存在しない。}$$

したがって、 $[1] \sim [6]$ から求める a, b, c の組は $4+3+1+1=9$ (個) である。

$$(3) \ a=b<c \text{ のときを考える。}$$

$$X \text{ が存在するための条件は } c<a+a \quad \text{すなわち } a<c<2a$$

$$\text{また, } \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{c} \text{ のうち最大のものは } \frac{1}{a} \text{ であり, } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a} \text{ が成り立つから, } Y$$

は常に存在する。

$$\text{よって, } X \text{ と } Y \text{ が両方とも存在するための条件は } a<c<2a$$

$a<c<2a$ を満たす a, c の組は

$$(a, c)=(2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7)$$

ゆえに、 $a=b<c$ のとき条件(*)を満たす a, b, c の組は9個ある。

$a=b=c$ のとき、条件(*)を満たす a, b, c の組は

$$(a, b, c)=(1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots, (7, 7, 7)$$

の7個である。

以上から、条件(*)を満たす a, b, c の組は、 a, b, c の大小関係のすべての場合を

$$\text{考えて } 9 \times {}_3C_1 + 9 \times 3! + 9 \times {}_3C_1 + 7 = 115 \text{ (個)}$$

3 [1999 京都大]

解説

$M(0, 0)$ とし, $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $H(b, 0)$, $A(b, c)$ とおく.

ここで, $b > 0$ としてよい.

鋭角三角形であるから $b < a$ である.

$$AB^2 + AC^2 = \{(a+b)^2 + c^2\} + \{(a-b)^2 + c^2\} = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$P(x, 0)$ とすると

$$\begin{aligned} 2AP^2 + BP^2 + CP^2 &= 2\{(x-b)^2 + c^2\} + (x+a)^2 + (x-a)^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(x^2 - bx) \end{aligned}$$

点 P を線分 MH 上にとるとき, $0 \leq x \leq b$ であるから

$$AB^2 + AC^2 - (2AP^2 + BP^2 + CP^2) = 4x(b-x) \geq 0$$

ゆえに $AB^2 + AC^2 \geq 2AP^2 + BP^2 + CP^2$

4 [2015 大阪大]

解説

$$\begin{aligned}
 & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2 \geq 0 \\
 & 1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\
 &= 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 + x^2y^2 - 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= (1-x^2)(1-y^2) + x^2y^2 - 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= (\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy)^2 \geq 0 \\
 & \text{よって} \quad 0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1
 \end{aligned}$$

別解 $x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$$\begin{aligned}
 &= x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2) + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\
 &= (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2
 \end{aligned}$$

$|x| \leq 1, |y| \leq 1$ より $x = \cos \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$), $y = \cos \beta$ ($0 \leq \beta \leq \pi$) となる α, β が存在する。

$$\begin{aligned}
 x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} &= (\cos \alpha)\sqrt{1-\cos^2 \beta} + (\cos \beta)\sqrt{1-\cos^2 \alpha} \\
 &= (\cos \alpha)|\sin \beta| + (\cos \beta)|\sin \alpha| \\
 &= \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha \\
 &= \sin(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

$$-1 \leq \sin(\alpha + \beta) \leq 1 \text{ から } 0 \leq \sin^2(\alpha + \beta) \leq 1$$

$$\text{よって } 0 \leq (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2 \leq 1$$

$$\text{したがって } 0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$