

1 [2015 大阪大]

(解説)

$$(1) \quad \angle APB = \angle ARB = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle APQ = \angle AQP = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \angle BAR = \angle BPR &= \frac{\pi}{2} - \angle APQ \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

直角三角形 PAB において, $AP = AB \cos \theta = 2 \cos \theta$

よって $AQ = AP = 2 \cos \theta$

また, 直角三角形 RAB において

$$AR = AB \cos \angle BAR = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} \triangle AQR &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot AR \cdot \sin \angle QAR = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$(2) \quad \triangle AQR = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから,}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

のとき $\triangle AQR$ の面積が最大となる。

$$\text{このとき} \quad AQ = AP = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

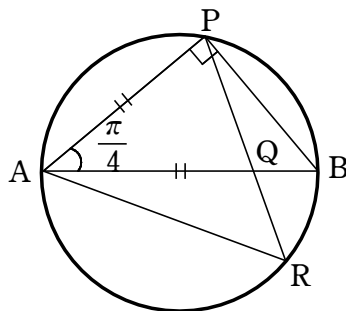
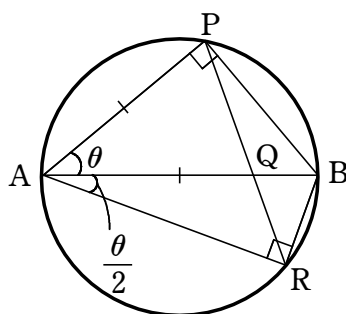
$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{また} \quad PQ : QR = \triangle APQ : \triangle AQR = \frac{\sqrt{2}}{2} \triangle APB : \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{2} : 1$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AP} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} + \frac{2+\sqrt{2}}{2} (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP})$$

$$= \overrightarrow{AP} + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{2+\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{AP}$$



$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{AP}$$

□ [2015 神戸大]

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{c_n}^{x+c_n} (a_n t + b_n) dt &= \left[\frac{a_n}{2} t^2 + b_n t \right]_{c_n}^{x+c_n} \\ &= \frac{a_n}{2} (x^2 + 2c_n x) + b_n x \\ &= \frac{a_n}{2} x^2 + (a_n c_n + b_n) x \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad a_{n+1} x^2 + b_{n+1} x = \frac{a_n}{2} x^2 + (a_n c_n + b_n) x$$

これが x についての恒等式であるから

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, \quad b_{n+1} = b_n + a_n c_n \quad \dots\dots ①$$

ゆえに、数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 5$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき、① から

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n + a_n c_n \\ &= b_n + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 3^{n-1} \\ &= b_n + 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ の階差数列の第 n 項は $5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \\ &= 7 + 5 \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ &= 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$n=1 \text{ のとき} \quad 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0 - 3 = 7$$

$b_1=7$ であるから、②は $n=1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad b_n = 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3$$

(3) $c_n=n$ のとき、①から

$$b_{n+1} = b_n + 5 \cdot n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + 5 \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= 7 + 5 \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

ここで、 $S = \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ ($n \geq 2$) とおくと

$$S = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

両辺に $\frac{1}{2}$ を掛けると

$$\frac{1}{2}S = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots + (n-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

両辺を引くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = S = 4 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

③に代入して

$$b_n = 7 + 5 \left\{ 4 - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\} = 27 - 5(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \dots\dots \textcircled{4}$$

$$n=1 \text{ のとき} \quad 27 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 7$$

$b_1=7$ であるから、④は $n=1$ のときにも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad b_n = 27 - 5(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

3 [2015 神戸大]

(解説)

3 辺の長さが a, b, c である三角形を X , 3 辺の長さが $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ である三角形を Y とする。

(1) $a = b > c$ のとき, a, a, c のうち最大のものが a であり, $a + c > a$ が成り立つから, X は常に存在する。

また, $\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{c}$ のうち最大のものは $\frac{1}{c}$ であるから, Y が存在するための条件は

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} > \frac{1}{c} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a}{2} < c$$

よって, X と Y が両方とも存在するための条件は $\frac{a}{2} < c < a$

これを満たす a, c の組は

$(a, c) = (3, 2), (4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6)$

ゆえに, 求める a, b, c の組は 9 個である。

(2) $a > b > c$ …… ① であるから, X が存在するための条件は $b + c > a$ …… ②

① より, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$ であるから, Y が存在するための条件は $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

両辺に abc (> 0) を掛けると $bc + ca > ab$

すなわち $bc > a(b - c)$ …… ③

[1] $a = 7$ のとき ① から $7 > b > c$

② から $b + c > 7$

③ から $bc > 7(b - c)$

よって, この 3 つの不等式を満たす b, c の組は

$(b, c) = (6, 5), (6, 4), (5, 4), (5, 3)$ の 4 個である。

[2] $a = 6$ のとき ① から $6 > b > c$

② から $b + c > 6$

③ から $bc > 6(b - c)$

よって, この 3 つの不等式を満たす b, c の組は

$(b, c) = (5, 4), (5, 3), (4, 3)$ の 3 個である。

[3] $a = 5$ のとき ① から $5 > b > c$

② から $b + c > 5$

③ から $bc > 5(b - c)$

よって, この 3 つの不等式を満たす b, c の組は $(b, c) = (4, 3)$ の 1 個である。

[4] $a = 4$ のとき ① から $4 > b > c$

② から $b + c > 4$

$$\textcircled{3} \text{ から } bc > 4(b-c)$$

よって、この3つの不等式を満たす b, c の組は $(b, c) = (3, 2)$ の1個である。

[5] $a=3$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ から } 3 > b > c \quad \text{よって } b=2, c=1$$

このとき、 $b+c=a$ であるから、 $\textcircled{2}$ を満たさない。

[6] $a \leq 2$ のとき $\textcircled{1}$ を満たす b, c は存在しない。

したがって、[1] ~ [6] から求める a, b, c の組は $4+3+1+1=9$ (個) である。

(3) $a=b < c$ のときを考える。

X が存在するための条件は $c < a+a$ すなわち $a < c < 2a$

また、 $\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{c}$ のうち最大のものは $\frac{1}{a}$ であり、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$ が成り立つから、 Y は常に存在する。

よって、 X と Y が両方とも存在するための条件は $a < c < 2a$

$a < c < 2a$ を満たす a, c の組は

$$(a, c) = (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7)$$

ゆえに、 $a=b < c$ のとき条件(*)を満たす a, b, c の組は9個ある。

$a=b=c$ のとき、条件(*)を満たす a, b, c の組は

$$(a, b, c) = (1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots, (7, 7, 7)$$

の7個である。

以上から、条件(*)を満たす a, b, c の組は、 a, b, c の大小関係のすべての場合を考えて $9 \times {}_3C_1 + 9 \times 3! + 9 \times {}_3C_1 + 7 = 115$ (個)