

1 [1999 京都大]

(解説)

(1) 側面で最低2色, 側面以外で最低1色必要であるから $P_2=0$ 更に, 側面が2色で塗れる条件は, n が偶数のときである.

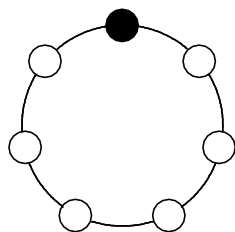
$$\text{よって } P_3 = \begin{cases} 0 & (n \text{ は奇数}) \\ 6 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

(2) $n=7$ のとき, 側面には3色が必要であるから, 上下面は同じ色である. 側面の色の選び方は ${}_4C_3=4$ (通り)

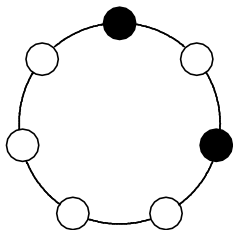
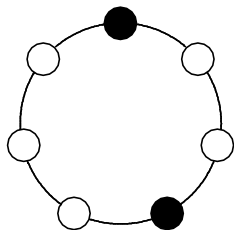
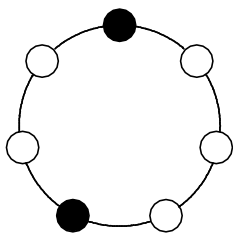
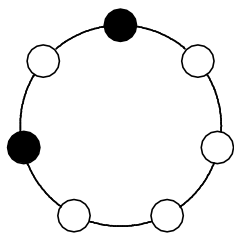
このうちのある1色を塗る回数は1回または2回または3回である.

[1] 1回するとき

右図から2通り

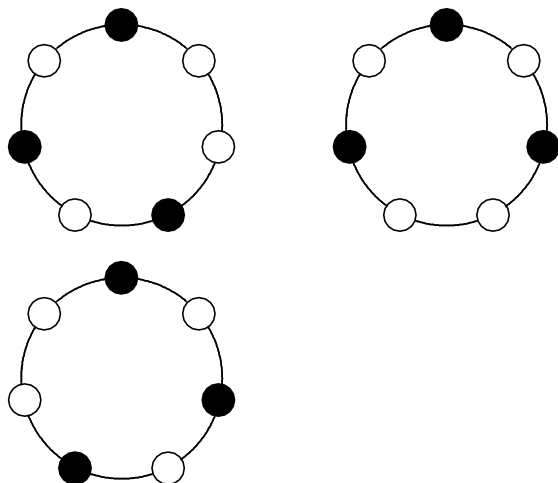


[2] 2回するとき

下図から $2 \times 2 \times 4 = 16$ (通り)

[3] 3回するとき

下図から $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$ (通り)



以上から $P_4 = 4 \times 3 \times (2 + 16 + 24) = 504$

2 [2016 神戸大]

(解説)

$$(1) \quad r = 1 + \cos \theta \text{ であるから} \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y &= r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \cos \theta - (1 + \cos \theta) \sin \theta = -\sin \theta (1 + 2\cos \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta = (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$$

$$\text{よって, } \frac{dx}{d\theta} = 0 \text{ となる } \theta \text{ の値は} \quad \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi$$

したがって, $\frac{dx}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標は

$$(2, 0), \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{また, } \frac{dy}{d\theta} = 0 \text{ となる } \theta \text{ の値は} \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{したがって, } \frac{dy}{d\theta} = 0 \text{ となる点の直交座標は} \quad \left(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), (0, 0), \left(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}{-\sin \theta (1 + 2\cos \theta)}$$

であるから

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}{-\sin \theta (1 + 2\cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left\{ -\frac{(2\cos \theta - 1)\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 + 2\cos \theta)(1 - \cos \theta)} \right\}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left\{ -\frac{(2\cos\theta - 1)\sin\theta}{(1 + 2\cos\theta)(1 - \cos\theta)} \right\} = 0$$

(3) $x(\theta) = (1 + \cos\theta)\cos\theta$, $y(\theta) = (1 + \cos\theta)\sin\theta$ とすると

$$x(2\pi - \theta) = x(\theta), \quad y(2\pi - \theta) = -y(\theta)$$

よって、曲線 C で $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ に対応する曲線は $0 \leq \theta \leq \pi$ に対応する曲線を x 軸に関して対称移動したものである。

(1) から、 $0 \leq \theta \leq \pi$ における増減表は次のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		-	-	-	0	+	0
x	2	←	$\frac{3}{4}$	←	$-\frac{1}{4}$	→	0
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	0
y	0	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↓	0

したがって、(2) と合わせて、曲線 C の概形は右の図のようになる。

$$(4) \quad \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta = -\sin\theta - \sin 2\theta$$

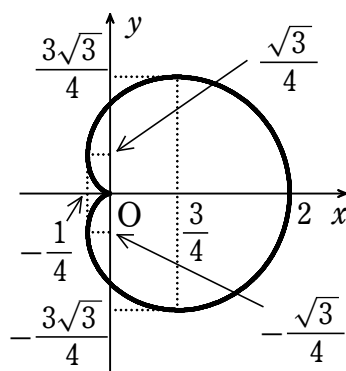
$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = \cos\theta + \cos 2\theta$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (-\sin\theta - \sin 2\theta)^2 \\ &\quad + (\cos\theta + \cos 2\theta)^2 \\ &= 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、曲線 C の長さを l とすると

$$l = 2 \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4 \int_0^\pi \left| \cos\frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4 \int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left[2\sin\frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 8$$



3 [2016 大阪大]

解説

(1) $x+y=c$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

$x>0, y>0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

よって $xy\leq \frac{c^2}{4}$

$$c+1>0 \text{ であるから } \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 1+\frac{c+1}{\frac{c^2}{4}}=\left(1+\frac{2}{c}\right)^2$$

等号が成り立つのは $x=y=\frac{c}{2}$ のときである。

よって、求める最小値は $\left(1+\frac{2}{c}\right)^2$

(2) z を $0<z<1$ の範囲に固定して考える。

$x+y=1-z$ であるから、(1) より、 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ は $x=y=\frac{1-z}{2}$ のとき最小値

$\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2$ をとる。

$$1-\frac{4}{3z}<0 \text{ であるから } \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)\leq \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

ここで、 $f(z)=\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\cdot \frac{2}{(1-z)^2}\left(1-\frac{4}{3z}\right) + \left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\cdot \frac{4}{3z^2} \\ &= 4\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\cdot \frac{(2z-1)(2z-3)}{3z^2(1-z)^2} \end{aligned}$$

$f'(z)=0$ とすると $z=\frac{1}{2}$

よって、 $0<z<1$ における $f(z)$ の増減表は右のようになる。

$z=\frac{1}{2}$ のとき $x=y=\frac{1}{4}$

z	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(z)$		+	0	-	
$f(z)$			$-\frac{125}{3}$		

ゆえに、 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$ は $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $-\frac{125}{3}$ をとる。

4 [1999 京都大]

(解説)

(1) $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} = 0 \dots\dots ①$ から

$$p = -(q\sqrt{2} + r\sqrt{3})$$

両辺を平方して $p^2 = 2q^2 + 3r^2 + 2qr\sqrt{6}$

$p^2, 2q^2 + 3r^2, 2qr$ は有理数, $\sqrt{6}$ は無理数であるから $2qr = 0$

よって $q = 0$ または $r = 0$

$q = 0$ のとき ① から $p + r\sqrt{3} = 0$

p, r は有理数, $\sqrt{3}$ は無理数であるから

$$p = r = 0$$

$r = 0$ のとき ① から $p + q\sqrt{2} = 0$

p, q は有理数, $\sqrt{2}$ は無理数であるから

$$p = q = 0$$

以上から, ① ならば $p = q = r = 0$

(2) $f(1), f(1 + \sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ がすべて有理数であると仮定して, $f(1) = p,$

$f(1 + \sqrt{2}) = q, f(\sqrt{3}) = r$ (p, q, r は有理数) とおくと

$$1 + a + b = p \dots\dots ②, \quad 3 + 2\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})a + b = q \dots\dots ③,$$

$$3 + \sqrt{3}a + b = r \dots\dots ④$$

③ - ② から

$$2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}a = q - p \dots\dots ⑤$$

④ - ② から

$$2 + (\sqrt{3} - 1)a = r - p \dots\dots ⑥$$

⑤ の両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて整理すると

$$2a = -4 + (q - p - 2)\sqrt{2}$$

⑥ の両辺に $\sqrt{3} + 1$ を掛けて整理すると

$$2a = r - p - 2 + (r - p - 2)\sqrt{3}$$

よって $-4 + (q - p - 2)\sqrt{2} = r - p - 2 + (r - p - 2)\sqrt{3}$

ゆえに $r - p + 2 - (q - p - 2)\sqrt{2} + (r - p - 2)\sqrt{3} = 0$

$r - p + 2, q - p - 2, r - p - 2$ は有理数であるから, (1) により

$$r - p + 2 = 0, q - p - 2 = 0, r - p - 2 = 0$$

この第1式と第3式は同時には成立しないから, 矛盾.

したがって, $f(1), f(1 + \sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ の少なくとも1つは無理数である.