

1 [2014 神戸大]

(解説)

$$(1) \quad A + B = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n+1) = n(2n+1)$$

よって、 n が奇数のとき、 $A+B$ は奇数となる。

ゆえに、 A と B の偶奇は異なるから、 A と B は等しくない。

(2) (1) より、 $A+B=n(2n+1)$ から、 A と B の差は

$$|A-B| = |(A+B)-2B| = |n(2n+1)-2B|$$

n が偶数のとき、 $n(2n+1)$ は偶数となり、 $2B$ も偶数であるから、

$|A-B|$ は偶数となる。

すなわち、 A と B の差は偶数である。

(3) $n=4$ のとき、カードは1から8までの8枚である。

$$\text{このとき} \quad A+B=4 \cdot 9=36$$

$$\text{よって、} A \text{ と } B \text{ が等しいとき} \quad A=B=18$$

合計が18となるような4枚のカードの数字の組合せは

$$(1, 2, 7, 8), (1, 3, 6, 8), (1, 4, 5, 8), (1, 4, 6, 7),$$

$$(2, 3, 5, 8), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 6)$$

の8通りある。

$$\text{よって、求める確率は} \quad \frac{8}{{}_8C_4} = \frac{8}{70} = \frac{4}{35}$$

2 [2014 大阪大]

(解説)

$$(1) \quad (a+bi)(x+yi) \text{ を展開して整理すると} \quad (ax-by) + (bx+ay)i$$

この実部は $ax-by$ 、虚部は $bx+ay$ であるから、 L_1, L_2 はそれぞれ次の等式を満たす点 (x, y) 全体の集合である。

$$L_1: ax-by=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$L_2: bx+ay=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$a^2+b^2>0$ であるから、 $a=0$ かつ $b=0$ とはならない。

したがって、 L_1 と L_2 はともに直線である。

(2) [1] $a=0$ かつ $b \neq 0$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ は } y = -\frac{2}{b}, \textcircled{2} \text{ は } x = -\frac{3}{b} \text{ であるから、} L_1 \text{ と } L_2 \text{ は互いに垂直である。}$$

[2] $a \neq 0$ かつ $b=0$ のとき

①は $x=\frac{2}{a}$, ②は $y=-\frac{3}{a}$ であるから, L_1 と L_2 は互いに垂直である。

[3] $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき

①は $y=\frac{a}{b}x-\frac{2}{b}$, ②は $y=-\frac{b}{a}x-\frac{3}{a}$ である。

よって, L_1 の傾きは $\frac{a}{b}$, L_2 の傾きは $-\frac{b}{a}$ で $\frac{a}{b} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$

ゆえに, L_1 と L_2 は互いに垂直である。

以上から, L_1 と L_2 は互いに垂直である。

参考 L_1 の法線ベクトル $(a, -b)$ と L_2 の法線ベクトル (b, a) の内積が0になることを示してもよい。

(3) ① $\times a +$ ② $\times b$ より $(a^2+b^2)x=2a-3b$

$a^2+b^2 \neq 0$ であるから $x=\frac{2a-3b}{a^2+b^2}$

また, ② $\times a -$ ① $\times b$ より $(a^2+b^2)y=-3a-2b$

$a^2+b^2 \neq 0$ であるから $y=\frac{-3a-2b}{a^2+b^2}$

よって, L_1 と L_2 の交点は $\left(\frac{2a-3b}{a^2+b^2}, \frac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$

別解 $(a+bi)(x+yi)=2-3i$ から

$$x+yi = \frac{2-3i}{a+bi} = \frac{(2-3i)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(2a-3b)+(-3a-2b)i}{a^2+b^2}$$

実部と虚部を比較して $x=\frac{2a-3b}{a^2+b^2}, y=\frac{-3a-2b}{a^2+b^2}$

よって, L_1 と L_2 の交点は $\left(\frac{2a-3b}{a^2+b^2}, \frac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$

3 [2014 大阪大]

解説

$$(1) \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

また, $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \neq 0$ から

$$\cos \frac{x+y}{2} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \cos \frac{x-y}{2} \neq 0$$

$$\text{よって} \quad \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \tan \frac{x+y}{2}$$

$$(2) \quad x = y = 0, \quad z = \frac{\pi}{2} \quad \text{とすると}$$

$$(\text{左辺}) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (\text{右辺}) = \frac{0+0+1}{1+1+0} = \frac{1}{2}$$

よって $(\text{左辺}) \neq (\text{右辺})$

ゆえに, 与えられた等式は成り立たない。 (反例: $x = y = 0, \quad z = \frac{\pi}{2}$)