

1 [2015 岐阜大]

関数 $f(x) = e^{-x}$ を考える。曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $t > 0$ として、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線と x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

- (1) P, Q の座標を求めよ。
- (2) 原点を O とするとき、 $\triangle OPQ$ の面積を S とする。 t が変化するとき、 S の最大値を求めよ。また、そのときの2点 P, Q を通る直線 l の方程式を求めよ。
- (3) C と (2) で求めた l および y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

2 [2015 神戸大]

a, b, c を1以上7以下の自然数とする。次の条件(*)を考える。

- (*) 3辺の長さが a, b, c である三角形と、3辺の長さが $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

- (1) $a = b > c$ であり、かつ条件(*)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。
- (2) $a > b > c$ であり、かつ条件(*)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。
- (3) 条件(*)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

3 [1999 京都大]

鋭角三角形 ABC において、辺 BC の中点を M 、 A から辺 BC に引いた垂線を AH とする。点 P を線分 MH 上にとるとき、 $AB^2 + AC^2 \geq 2AP^2 + BP^2 + CP^2$ となることを示せ。

4 [2015 大阪大]

実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ。