

1 [2017 神戸大]

(解説)

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおく。 $y = f(x)$ のグラフは点 $(1, 4)$ を通るから $a + b + c = 4$ …… ①

$$\text{また} \quad \int_{-1}^2 f(x) dx = \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_{-1}^2 = 3a + \frac{3}{2}b + 3c$$

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = 15 \text{ であるから} \quad 3a + \frac{3}{2}b + 3c = 15$$

$$\text{すなわち} \quad 2a + b + 2c = 10 \quad \text{…… ②}$$

$$\text{①} \times 2 - \text{②} \text{ から} \quad b = -2$$

よって、 $f(x)$ の1次の項の係数は -2 (2) 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{2}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$\text{ここで, ②} - \text{①} \text{ から} \quad a + c = 6 \quad \text{すなわち} \quad c = -a + 6$$

$$\text{ゆえに} \quad \alpha\beta = \frac{-a+6}{a} = \frac{6}{a} - 1 = 3 \cdot \frac{2}{a} - 1 = 3(\alpha + \beta) - 1$$

$$\text{したがって} \quad \alpha\beta = 3(\alpha + \beta) - 1$$

(3) (2) から $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 1 = 0$

$$\text{これを变形すると} \quad (\alpha - 3)(\beta - 3) = 8 \quad \text{…… ③}$$

 α と β がともに正の整数であるとき $\alpha - 3 \geq -2$, $\beta - 3 \geq -2$ よって、③を満たす $\alpha - 3$ と $\beta - 3$ の組は

$$(\alpha - 3, \beta - 3) = (1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)$$

$$\text{すなわち} \quad (\alpha, \beta) = (4, 11), (5, 7), (7, 5), (11, 4)$$

[1] $(\alpha, \beta) = (4, 11), (11, 4)$ のとき

$$\alpha + \beta = 15 \text{ であるから, (2) より} \quad a = \frac{2}{15}, \quad c = -a + 6 = \frac{88}{15}$$

これは $a \neq 0$ を満たす。[2] $(\alpha, \beta) = (5, 7), (7, 5)$ のとき

$$\alpha + \beta = 12 \text{ であるから, (2) より} \quad a = \frac{1}{6}, \quad c = -a + 6 = \frac{35}{6}$$

これは $a \neq 0$ を満たす。

$$\text{[1], [2] から} \quad f(x) = \frac{2}{15}x^2 - 2x + \frac{88}{15}, \quad \frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{35}{6}$$

2 [2017 大阪大]

(解説)

(1) $x + y + z = 1$ …… ①, $x + 2y + 3z = 5$ …… ② とする。

② - ① から $y + 2z = 4$ ゆえに $y = 4 - 2z$

よって, ① から $x = 1 - (y + z) = z - 3$

$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ とすると, ① から

$$P = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

$x = z - 3$, $y = 4 - 2z$ を代入すると

$$\begin{aligned} P &= (z - 3)^2 + (4 - 2z)^2 + z^2 - (z - 3)(4 - 2z) - (4 - 2z)z - z(z - 3) \\ &= z^2 - 6z + 9 + 4z^2 - 16z + 16 + z^2 + 2z^2 - 10z + 12 + 2z^2 - 4z - z^2 + 3z \\ &= 9z^2 - 33z + 37 = 9\left(z^2 - \frac{11}{3}z\right) + 37 = 9\left(z - \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{11^2}{4} + 37 \\ &= 9\left(z - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{27}{4} \end{aligned}$$

よって, P は $z = \frac{11}{6}$ のとき最小値 $\frac{27}{4}$ をとる。

(2) $x = z - 3$, $y = 4 - 2z$ から

$$xyz = (z - 3) \cdot 2(2 - z)z \quad \dots\dots ③$$

$$= -2(z^2 - 5z + 6)z = -2z^3 + 10z^2 - 12z$$

$f(z) = -2z^3 + 10z^2 - 12z$ とすると

$$f'(z) = -6z^2 + 20z - 12 = -2(3z^2 - 10z + 6)$$

$$f'(z) = 0 \text{ とすると } z = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$z \geq 0$ における $f(z)$ の増減表は, 次のようになる。

z	0	...	$\frac{5 - \sqrt{7}}{3}$	...	$\frac{5 + \sqrt{7}}{3}$	...
$f'(z)$		-	0	+	0	-
$f(z)$	0	↘	極小	↗	極大	↘

ゆえに, $f(z)$ が最大となる z の値は $z = 0$ または $z = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$

ここで, $\frac{5 + 2}{3} < \frac{5 + \sqrt{7}}{3} < \frac{5 + 3}{3}$ であるから $2 < \frac{7}{3} < \frac{5 + \sqrt{7}}{3} < \frac{8}{3} < 3$

よって, $z = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$ (> 0) のとき $z - 3 < 0$, $2 - z < 0$

したがって, ③ から $f\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{3}\right) > 0$

ゆえに、 xyz が最大となる z の値は $z = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$

3 [2017 大阪大]

(解説)

(1) $a_1=2>0$ で, $a_{n+1}=8a_n^2$ であるから, すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。

よって, $a_{n+1}=8a_n^2$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n^2$$

$$\text{よって} \quad \log_2 a_{n+1} = \log_2 8 + 2\log_2 a_n$$

$$\text{ゆえに} \quad b_{n+1} = 2b_n + 3 \quad \dots\dots ①$$

(2) ① を変形して $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

$$\text{また} \quad b_1 + 3 = \log_2 a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$$

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項 4, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2^{n+1} - 3$$

(3) すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であるから, $P_n > 0$ である。

よって, $P_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 P_n = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_n$$

ゆえに, (2) から

$$\begin{aligned} \log_2 P_n &= \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 3) \\ &= \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n \\ &= 2^{n+2} - 3n - 4 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}$$

(4) $P_n > 10^{100}$ について, 両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 P_n > 100 \log_2 10 \quad \dots\dots ③$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, ② から} \quad \log_2 P_{n+1} - \log_2 P_n &= 2^{n+3} - 3(n+1) - 2^{n+2} + 3n \\ &= 2^{n+2} - 3 \end{aligned}$$

$$n \geq 1 \text{ のとき, } 2^{n+2} - 3 > 0 \text{ であるから} \quad \log_2 P_{n+1} - \log_2 P_n > 0$$

よって, $\log_2 P_n$ は単調に増加するから, ③ を満たす最小の自然数 n について考える。

$$\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16 \text{ であるから} \quad 3 < \log_2 10 < 4$$

$$\text{ゆえに} \quad 300 < 100 \log_2 10 < 400$$

$$\text{② から} \quad \log_2 P_6 = 2^8 - 3 \cdot 6 - 4 = 234 < 300,$$

$$\log_2 P_7 = 2^9 - 3 \cdot 7 - 4 = 487 > 400$$

よって, ③ を満たす最小の自然数 n は $n=7$ であり, 求める最小の自然数 n は $n=7$