

1 [2014 神戸大]

解説

$$(1) \quad A + B = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n + 1) = n(2n + 1)$$

よって、 n が奇数のとき、 $A + B$ は奇数となる。

ゆえに、 A と B の偶奇は異なるから、 A と B は等しくない。

(2) (1) より、 $A + B = n(2n + 1)$ から、 A と B の差は

$$|A - B| = |(A + B) - 2B| = |n(2n + 1) - 2B|$$

n が偶数のとき、 $n(2n + 1)$ は偶数となり、 $2B$ も偶数であるから、

$|A - B|$ は偶数となる。

すなわち、 A と B の差は偶数である。

(3) $n = 4$ のとき、カードは 1 から 8 までの 8 枚である。

$$\text{このとき} \quad A + B = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\text{よって、} A \text{ と } B \text{ が等しいとき} \quad A = B = 18$$

合計が 18 となるような 4 枚のカードの数字の組合せは

(1, 2, 7, 8), (1, 3, 6, 8), (1, 4, 5, 8), (1, 4, 6, 7),

(2, 3, 5, 8), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 6)

の 8 通りある。

$$\text{よって、求める確率は} \quad \frac{8}{{}_8C_4} = \frac{8}{70} = \frac{4}{35}$$

2 [2014 大阪大]

解説

$$(1) \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

また, $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \neq 0$ から

$$\cos \frac{x+y}{2} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \cos \frac{x-y}{2} \neq 0$$

$$\text{よって} \quad \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \tan \frac{x+y}{2}$$

$$(2) \quad x = y = 0, \quad z = \frac{\pi}{2} \quad \text{とすると}$$

$$(\text{左辺}) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (\text{右辺}) = \frac{0+0+1}{1+1+0} = \frac{1}{2}$$

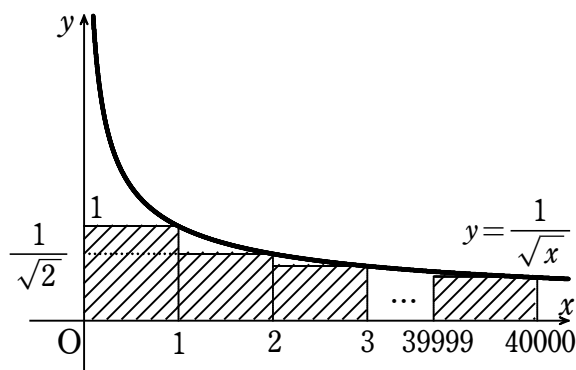
よって $(\text{左辺}) \neq (\text{右辺})$

ゆえに, 与えられた等式は成り立たない。 (反例: $x = y = 0, \quad z = \frac{\pi}{2}$)

3 [2014 大阪大]

(解説)

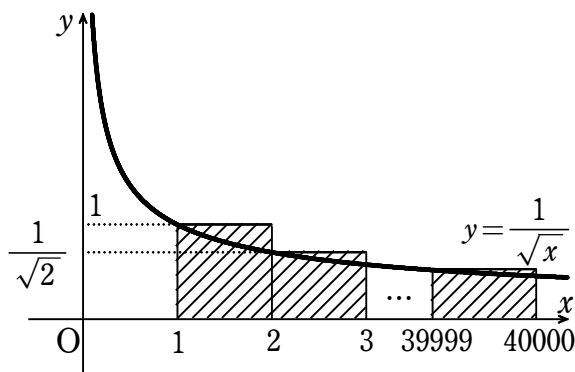
$\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{40000}}$ は、次の図の斜線部分の面積の和に等しい。



図から $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{40000}} < \int_1^{40000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

よって $\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \int_1^{40000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1 + [2\sqrt{x}]_1^{40000} = 399 \cdots \cdots \textcircled{1}$

また、次の図から $\int_1^{40000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{39999}}$



よって $\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{40000} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\sqrt{40000}} = 398 + \frac{1}{200} \cdots \cdots \textcircled{2}$

①, ② から $398 + \frac{1}{200} < \sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}} < 399$

したがって、 $\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は 398

4 [2001 京都大]

解説

$$(e^{-x}\sin nx)' = -e^{-x}\sin nx + ne^{-x}\cos nx \dots\dots ①$$

$$(e^{-x}\cos nx)' = -e^{-x}\cos nx - ne^{-x}\sin nx \dots\dots ②$$

①+② $\times n$ より

$$(e^{-x}\sin nx + ne^{-x}\cos nx)' = -(n^2+1)e^{-x}\sin nx$$

$$\text{これより } \int e^{-x}\sin nx dx = -\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(\sin nx + n\cos nx) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|dx &= \sum_{k=0}^{n^2-1} \int_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi} e^{-x}|\sin nx|dx \\ &= \sum_{k=0}^{n^2-1} \int_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi} (-1)^k e^{-x}\sin nx dx \\ &= \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=0}^{n^2-1} (-1)^{k+1} \left[e^{-x}(\sin nx + n\cos nx) \right]_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi} \\ &= \frac{1}{n^2+1} \sum_{k=0}^{n^2-1} (-1)^{k+1} \left\{ e^{-\frac{k+1}{n}\pi} \cdot n\cos(k+1)\pi - e^{-\frac{k}{n}\pi} \cdot n\cos k\pi \right\} \\ &= \frac{n}{n^2+1} \sum_{k=0}^{n^2-1} (-1)^{k+1} \left\{ (-1)^{k+1} e^{-\frac{k+1}{n}\pi} - (-1)^k e^{-\frac{k}{n}\pi} \right\} \\ &= \frac{n}{n^2+1} \sum_{k=0}^{n^2-1} \left(e^{-\frac{k+1}{n}\pi} + e^{-\frac{k}{n}\pi} \right) \\ &= \frac{n}{n^2+1} \left(e^{-\frac{\pi}{n}} + 1 \right) \sum_{k=0}^{n^2-1} e^{-\frac{k}{n}\pi} \\ &= \frac{n}{n^2+1} \left(e^{-\frac{\pi}{n}} + 1 \right) \times \frac{1 - e^{-n\pi}}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \left(e^{-\frac{\pi}{n}} + 1 \right) (1 - e^{-n\pi}) \cdot \frac{1}{n(1 - e^{-\frac{\pi}{n}})} \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{n} = t \text{ とおくと}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-\frac{\pi}{n}}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(e^t - 1)}{t} = \pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^0}{t - 0} = \pi$$

$$\text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|dx = \frac{1}{1+0} \times (1+1)(1-0) \times \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$