

1 [2016 神戸大]

解説

$$(1) \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

(2) 点 S は 3 点 P, Q, R を通る平面上にあるから

$$\overrightarrow{PS} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR} \quad (s, t \text{ は実数})$$

と表される。(1) の結果から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2}t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、点 S は辺 AC 上にあるから、 $AS : SC = u : (1-u)$ とすると

$$\overrightarrow{OS} = (1-u)\vec{a} + u\vec{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表される。

4 点 O, A, B, C は同じ平面上にないから、①, ② より

$$\frac{1}{2}(1-s-t) = 1-u \quad \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \frac{2}{3}s + \frac{1}{2}t = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad \frac{1}{2}t = u \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \text{ から } t = 2u \quad \text{よって, } \textcircled{4} \text{ から } s = -\frac{3}{2}u$$

$$\text{ゆえに, } \textcircled{3} \text{ から } 1 + \frac{3}{2}u - 2u = 2 - 2u$$

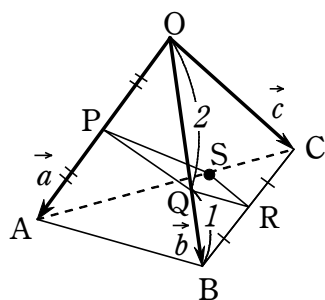
$$\text{これを解いて } u = \frac{2}{3} \quad \text{よって } s = -1, t = \frac{4}{3}$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SC}| = \frac{2}{3} : \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2 : 1$$

$$(3) \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

また、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QS}|^2 &= \frac{1}{3^2} |\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2 = \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b} \cdot \vec{c} + 4\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{9} \left(1^2 + 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{9} \end{aligned}$$



したがって $|\overrightarrow{QS}| = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2 [2016 神戸大]

(解説)

(1) $f(x) = |x^2 + 2ax + a| = |(x+a)^2 - a^2 + a|$

よって、放物線 $y = (x+a)^2 - a^2 + a$ ……(*) の頂点の y 座標 $-a^2 + a$ について、次のように場合分けをする。

[1] $-a^2 + a \geq 0$ すなわち $0 < a \leq 1$ のとき

放物線(*)の頂点の y 座標は 0 以上であるから、 $y = f(x)$ のグラフは図[1]のようになる。

[2] $-a^2 + a < 0$ すなわち $a > 1$ のとき

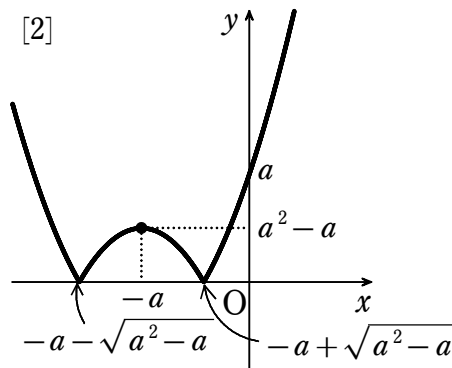
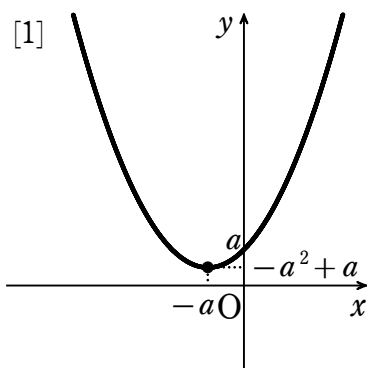
放物線(*)の頂点の y 座標は負であるから、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

$(x+a)^2 - a^2 + a = 0$ とすると $(x+a)^2 = a^2 - a$

すなわち $x + a = \pm \sqrt{a^2 - a}$

ゆえに $x = -a + \sqrt{a^2 - a}$, $-a - \sqrt{a^2 - a}$

よって、 $y = f(x)$ のグラフは図[2]のようになる。



(2) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1, 2)$ を通るとき、 $2 = |(-1)^2 + 2a \cdot (-1) + a|$ から
 $|a - 1| = 2$

よって $a - 1 = \pm 2$

$a > 0$ であるから $a = 3$

このとき、グラフと x 軸の交点の座標は $(-3 - \sqrt{6}, 0)$, $(-3 + \sqrt{6}, 0)$ であるから、

求める面積は $\int_{-3-\sqrt{6}}^{-3+\sqrt{6}} (-x^2 - 6x - 3) dx = \frac{1}{6} \{(-3 + \sqrt{6}) - (-3 - \sqrt{6})\}^3 = 8\sqrt{6}$

(3) $a = 2$ のとき $f(x) = |x^2 + 4x + 2| = |(x+2)^2 - 2|$

ここで、放物線 $y = x^2 + 4x + 2$ ……① と直線 $y = 2x + b$ ……② が接するときの接点の座標を考える。

①, ② から y を消去して $x^2 + 4x + 2 = 2x + b$

すなわち $x^2 + 2x + 2 - b = 0$ ③

方程式 ③ の判別式を D とすると, 放物線 ① と直線 ② が接するための条件は

$$D = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot (2 - b) = b - 1 \text{ であるから } b - 1 = 0$$

ゆえに $b = 1$

③ に代入して $x^2 + 2x + 1 = 0$

すなわち $(x + 1)^2 = 0$

よって $x = -1$

$x = -1$ を ① に代入して $y = -1$

したがって, 放物線 ① と直線 ② の接点の座標は

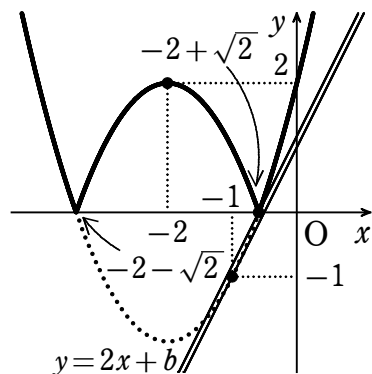
$$(-1, -1)$$

また, 直線 ② が点 $(-2 + \sqrt{2}, 0)$ を通るとき

$$0 = 2(-2 + \sqrt{2}) + b$$

$$b = 4 - 2\sqrt{2}$$

b の値について $4 - 2\sqrt{2} > 1$ であるから, $f(x) \geq 2x + b$ が成り立つような実数 b のとりうる値の範囲は $b \leq 4 - 2\sqrt{2}$



3 [2016 大阪大]

(解説)

$$\frac{1}{2}x^2 - 6 = \frac{1}{2}(x^2 - 12) = \frac{1}{2}(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) \text{ であるから}$$

$$x \leq -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \leq x \text{ のとき } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$$

$$-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

(1) 曲線 C の概形は、右の図の太線部分のようになる。

直線 L が点 $(-2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ を通るとき

$$4\sqrt{3} = -(-2\sqrt{3}) + t$$

$$\text{ゆえに } t = 2\sqrt{3}$$

また、直線 L が放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ に

$-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$ の範囲で接するとき、これと $y = -x + t$ から y を消した 2 次方程式

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = -x + t \text{ が重解をもつ。}$$

$$\text{整理すると } x^2 + 2x + 2t - 12 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2 \text{ 次方程式 } \textcircled{1} \text{ の判別式を } D \text{ とすると } \frac{D}{4} = 1^2 - (2t - 12) = 13 - 2t$$

$$D = 0 \text{ から } t = \frac{13}{2}$$

$$\text{求める } t \text{ の値の範囲は、図から } 2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}$$

(2) 点 P_1, P_2, P_3, P_4 の x 座標をそれぞれ $p_1, p_2,$

p_3, p_4 ($p_1 < p_2 < p_3 < p_4$) とする。

p_2, p_3 は (1) の 2 次方程式 $\textcircled{1}$ の解であるから

$$p_2 = -1 - \sqrt{13 - 2t}, \quad p_3 = -1 + \sqrt{13 - 2t}$$

$$\text{また, } p_1, p_4 \text{ は 2 次方程式 } \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = -x + t$$

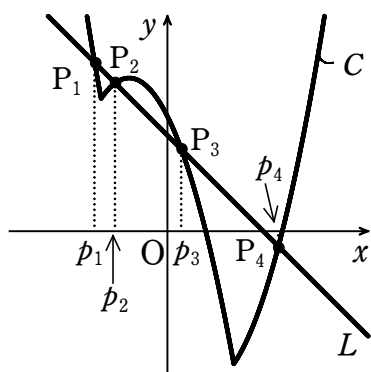
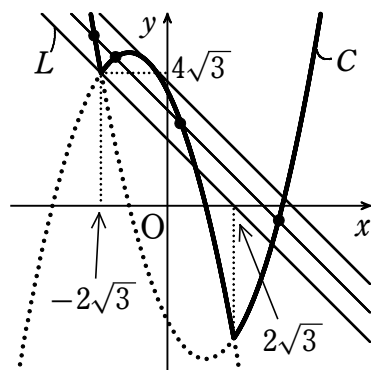
すなわち $x^2 - 2x - 2t - 12 = 0$ の解であるから

$$p_1 = 1 - \sqrt{13 + 2t}, \quad p_4 = 1 + \sqrt{13 + 2t}$$

直線 L の傾きは -1 であるから

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{2}(p_2 - p_1), \quad |\overrightarrow{P_3P_4}| = \sqrt{2}(p_4 - p_3), \quad |\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{2}(p_3 - p_2)$$

$$\text{したがって } \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = \frac{\sqrt{2}(p_2 - p_1) + \sqrt{2}(p_4 - p_3)}{\sqrt{2}(p_3 - p_2)} = \frac{p_4 - p_1 - (p_3 - p_2)}{p_3 - p_2}$$



$$= \frac{p_4 - p_1}{p_3 - p_2} - 1$$

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}| + |\overrightarrow{P_3P_4}|}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 4 \text{ から } \frac{p_4 - p_1}{p_3 - p_2} - 1 = 4$$

$$\text{ゆえに } \frac{1 + \sqrt{13+2t} - (1 - \sqrt{13+2t})}{-1 + \sqrt{13-2t} - (-1 - \sqrt{13-2t})} = 5$$

$$\text{よって } \sqrt{13+2t} = 5\sqrt{13-2t}$$

$$\text{両辺を 2 乗して } 13+2t = 25(13-2t) \quad \text{これを解いて } t=6$$

$t=6$ は (1) で求めた $2\sqrt{3} < t < \frac{13}{2}$ を満たす。

(3) $t=6$ のとき, $p_2 = -2$, $p_3 = 0$ である。

したがって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \left\{ -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 - (-x + 6) \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 x(x+2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) [0 - (-2)]^3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

