

【定期試験対策講習】

2 学期 中間 考查 対策教材①

中 2 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 K「2 次関数」前半

数学 M「整数」前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

【問題】

1

(1) 等式 $2xy - 2x + y + 5 = 0$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(2) 等式 $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{2}$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

2

(1) 等式 $4x^2 - y^2 = 32$ を満たす自然数 x, y の組をすべて求めよ。

(2) n は自然数とする。 $\sqrt{n^2 + 40}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

3

$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 3x + 4y - 5 = 0$ を満たす整数 x, y の値を求めよ。

4

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a, b の組をすべて求めよ。ただし、 $a < b$ とする。

(1) 和が 160, 最大公約数が 8 (2) 積が 300, 最小公倍数が 60

5

放物線 $y = x^2 - 3x + 2$ をどのように平行移動すると、放物線 $y = x^2 + x + 1$ に重なるか。

6

ある放物線を y 軸に関して対称移動し、更に x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動すると、放物線 $y = -2x^2 + 16x - 29$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

7

次の関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。

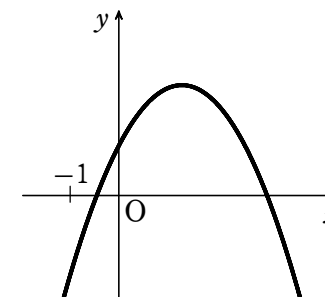
(1) $y = 2x^2 + 3x + 1 \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \right)$ (2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} \ (1 \leq x \leq 5)$

8

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図で与えられるとき, 次の値の符号をいえ。

(1) a (2) b (3) c

(4) $a - b + c$



9

関数 $y = ax^2 - 2ax + b \ (0 \leq x \leq 3)$ の最大値が 9, 最小値が 1 であるように, 定数 a, b の値を定めよ。

10

$\frac{14}{15}, \frac{21}{20}$ のどちらに掛けても積が自然数となる分数のうち, 最も小さいものを求めよ。

【解答&解説】

1

【解答】 (1) $(x, y) = (-2, 3), (-1, 7), (0, -5), (1, -1)$

(2) $(x, y) = (2, 2), (3, 4), (4, 8), (5, 20)$

2

【解答】 (1) $(x, y) = (3, 2)$ (2) $n = 3, 9$

3

【解答】 $(x, y) = (-1, 0), (1, 2)$

4

【解答】 (1) $(a, b) = (8, 152), (24, 136), (56, 104), (72, 88)$

(2) $(a, b) = (5, 60), (15, 20)$

5

【解答】 x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動

6

【解答】 $y = -2x^2 - 4x + 3$

7

【解答】 (1) $x = -\frac{1}{2}$ で最小値 0 , 最大値はない

(2) $x = 2$ で最大値 $\frac{7}{2}$, $x = 5$ で最小値 -1

8

【解答】 (1) $a < 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) $a - b + c < 0$

9

【解答】 $a = 2, b = 3$ または $a = -2, b = 7$

10

【解答】 $\frac{60}{7}$

1

【解説】

(1) $2xy - 2x + y + 5 = 0$ から $(2x + 1)(y - 1) + 1 + 5 = 0$

すなわち $(2x + 1)(y - 1) = -6$

x, y は整数であるから, $2x + 1$ は奇数, $y - 1$ は整数となる。

よって $(2x + 1, y - 1) = (-3, 2), (-1, 6), (1, -6), (3, -2)$

ゆえに $(x, y) = (-2, 3), (-1, 7), (0, -5), (1, -1)$

(2) 両辺に $2xy$ を掛けると $6y - 4x = xy$

すなわち $xy + 4x - 6y = 0$

変形すると $(x - 6)(y + 4) = -24$

x, y は自然数であるから, $x - 6, y + 4$ は整数で $x - 6 \geq -5, y + 4 \geq 5$

よって $(x - 6, y + 4) = (-4, 6), (-3, 8), (-2, 12), (-1, 24)$

ゆえに $(x, y) = (2, 2), (3, 4), (4, 8), (5, 20)$

2

【解説】

(1) $4x^2 - y^2 = 32$ から $(2x + y)(2x - y) = 32$ …… ①

x, y は自然数であるから, $2x + y, 2x - y$ は整数で $2x + y \geq 3$

また $2x + y > 2x - y$

よって, ① から $(2x + y, 2x - y) = (8, 4), (16, 2), (32, 1)$

ここで, $(2x + y) + (2x - y) = 4x$ であるから, $2x + y$ と $2x - y$ の和は 4 の倍数である。

よって, $(2x + y, 2x - y) = (8, 4)$ のみ適する。

ゆえに $(x, y) = (3, 2)$

(2) $\sqrt{n^2 + 40}$ が自然数となるとき, k を自然数として $\sqrt{n^2 + 40} = k$ と表される。

$\sqrt{n^2 + 40} = k$ の両辺を 2 乗して整理すると

$k^2 - n^2 = 40$ すなわち $(k + n)(k - n) = 40$ …… ①

k, n は自然数であるから, $k + n, k - n$ は整数で $k + n \geq 2$

また $k + n > k - n$

よって, ① から $(k + n, k - n) = (8, 5), (10, 4), (20, 2), (40, 1)$ …… ②

ここで, $(k + n) + (k - n) = 2k$ であるから, $k + n$ と $k - n$ の和は偶数である。

②の中で、この条件に適するの $(k+n, k-n)=(10, 4), (20, 2)$

ゆえに $(k, n)=(7, 3), (11, 9)$

したがって、求める自然数 n は $n=3, 9$

3

解説

$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=(2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2)-3$ であるから、

$$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2y-2)(2x-y+1)-3=0$$

したがって $(x+2y-2)(2x-y+1)=3$

x, y は整数であるから、 $x+2y-2, 2x-y+1$ も整数である。

$$\text{よって} \quad \begin{cases} x+2y-2=-3 \\ 2x-y+1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-2=-1 \\ 2x-y+1=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-2=1 \\ 2x-y+1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-2=3 \\ 2x-y+1=1 \end{cases}$$

これらの連立方程式の解は、順に $(x, y)=(-1, 0), \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right), (1, 2)$

x, y がともに整数であるものは $(x, y)=(-1, 0), (1, 2)$

4

解説

(1) 最大公約数が8であるから、 a, b は

$$a=8a', b=8b'$$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a'<b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$$8a'+8b'=160 \quad \text{すなわち} \quad a'+b'=20$$

$a'+b'=20, a'<b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b')=(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11)$$

よって $(a, b)=(8, 152), (24, 136), (56, 104), (72, 88)$

(2) 最大公約数を g とすると、 a, b は

$$a=ga', b=gb'$$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a'<b'$ である。

a, b の積と最大公約数、最小公倍数の積は等しいから

$$300=g \cdot 60 \quad \text{よって} \quad g=5$$

最小公倍数が60であるから

$$ga'b'=60 \quad \text{すなわち} \quad 5a'b'=60$$

よって $a'b'=12$

$a'b'=12, a'<b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b')=(1, 12), (3, 4)$$

したがって $(a, b)=(5, 60), (15, 20)$

5

解説

$y=x^2-3x+2$ ……①, $y=x^2+x+1$ ……② とする。

放物線①を平行移動して放物線②に重ねると、①の頂点は②の頂点に移る。

$$\text{①を変形すると} \quad y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$\text{②を変形すると} \quad y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\text{よって、①の頂点の座標は} \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{②の頂点の座標は} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

放物線①を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すれば、放物線①、②が重なるとすると

$$\frac{3}{2}+p=-\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}+q=\frac{3}{4} \quad \text{よって} \quad p=-2, q=1$$

したがって、 x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよい。

6

解説

求める放物線は、放物線 $y=-2x^2+16x-29$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動し、更に y 軸に関して対称移動したものである。

まず、 x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

$$y-2=-2\{x-(-3)\}^2+16\{x-(-3)\}-29$$

$$\text{よって} \quad y=-2(x+3)^2+16(x+3)-27$$

すなわち $y = -2x^2 + 4x + 3$

次に、 y 軸に関して対称移動すると

$$y = -2(-x)^2 + 4(-x) + 3$$

したがって、求める放物線の方程式は $y = -2x^2 - 4x + 3$

7

解説

(1) $y = 2x^2 + 3x + 1$

$$= 2 \left\{ x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

$$= 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

また $x = -\frac{1}{2}$ のとき $y = 0$

$x = \frac{1}{2}$ のとき $y = 3$

よって、与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

ゆえに $x = -\frac{1}{2}$ で最小値 0、最大値はない。

(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2^2) + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{3}{2}$$

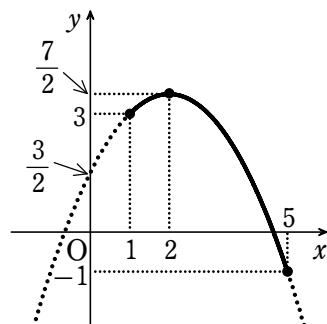
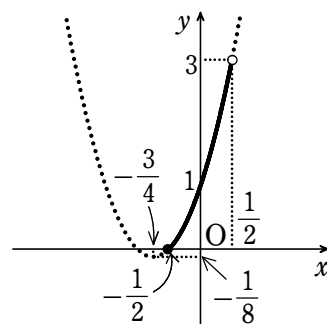
$$= -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{7}{2}$$

また $x = 1$ のとき $y = 3$

$x = 5$ のとき $y = -1$

よって、与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

ゆえに $x = 2$ で最大値 $\frac{7}{2}$ 、 $x = 5$ で最小値 -1



8

解説

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフについて

軸は直線 $x = -\frac{b}{2a}$ 、 y 軸との交点は点 $(0, c)$

(1) グラフは上に凸であるから $a < 0$

(2) 軸は $x > 0$ の範囲にあるから $-\frac{b}{2a} > 0$

ここで $a < 0$ であるから $b > 0$

(3) y 軸と正の部分で交わるから $c > 0$

(4) $x = -1$ のとき $y = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c$

$x = -1$ のとき $y < 0$ であるから $a - b + c < 0$

9

解説

関数の式を変形すると $y = a(x-1)^2 - a + b$ ($0 \leq x \leq 3$)

[1] $a > 0$ のとき

この関数は

$x = 3$ で最大値 $3a + b$ 、

$x = 1$ で最小値 $-a + b$ をとる。

最大値が 9、最小値が 1 であるとき

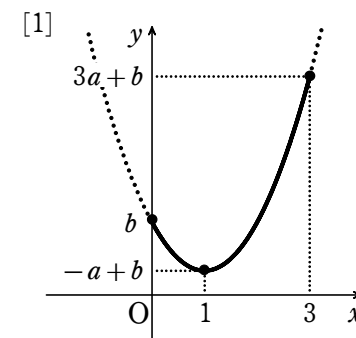
$$3a + b = 9, \quad -a + b = 1$$

これを解いて $a = 2, b = 3$

これは $a > 0$ を満たす。

[2] $a = 0$ のとき

この関数は $y = b$ ($0 \leq x \leq 3$) となり、条件を満たさない。



[3] $a < 0$ のとき

この関数は

$x=1$ で最大値 $-a+b$,

$x=3$ で最小値 $3a+b$ をとる。

最大値が9, 最小値が1であるとき

$$-a+b=9, 3a+b=1$$

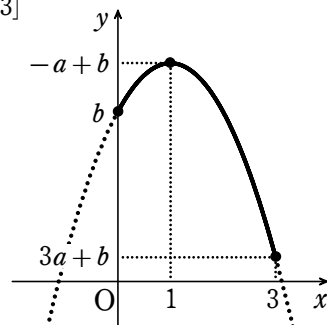
これを解いて $a=-2, b=7$

これは $a < 0$ を満たす。

[1]~[3] から

$$a=2, b=3 \text{ または } a=-2, b=7$$

[3]



10

解説

求める分数を $\frac{a}{b}$ (a, b は互いに素である自然数) とする。

$\frac{14}{15} \times \frac{a}{b}, \frac{21}{20} \times \frac{a}{b}$ が自然数であるから,

a は 15, 20 の公倍数, b は 14, 21 の公約数

となる。 $\frac{a}{b}$ は, このような数のうち最も小さいものであるから,

a は 15, 20 の最小公倍数, b は 14, 21 の最大公約数

である。

よって $a=60, b=7$ したがって, 求める分数は $\frac{60}{7}$