

【定期試験対策講習】

2 学期 中間 考查 対策教材②

高 1 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 K「確率統計」前半 + メジアン
数学 Y「関数」前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを
してください。

【問題】

1

次の関数の値域を求めよ。

$$(1) \quad y = -\frac{2x+1}{x+1} \quad (-2 \leq x \leq 1) \qquad (2) \quad y = \frac{2x-3}{3x-2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

2

不等式 $-\frac{2}{x-2} < 2-x$ を解け。

3

袋の中に 1 と書いてあるカードが 3 枚, 2 と書いてあるカードが 1 枚, 3 と書いてあるカードが 1 枚, 合計 5 枚のカードが入っている。この袋から 1 枚のカードを取り出し, それを戻さずにもう 1 枚カードを取り, これら 2 枚のカードに書かれている数字の平均を X とする。 X の期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$, 標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

4

原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。 P は, 硬貨を投げて表が出たら $+5$ だけ移動し, 裏が出たら -1 だけ移動する。硬貨を 3 回投げ終わったときの表の出た回数を X , 点 P の座標を Y とする。

- (1) Y を X で表せ。 (2) Y の期待値と分散を求めよ。

5

袋の中に, 1, 2, 3 の数字を書いた球が, それぞれ 4 個, 3 個, 2 個の計 9 個入っている。これらの球をもとに戻さずに 1 個ずつ 2 回取り出すとき, 1 回目の球の数字を X , 2 回目の球の数字を Y とする。 X, Y の同時分布を求めよ。

6

$x^2 - xy + y^2 - 3y = 0$ を満たす正の整数 x, y の組を求めよ。

7

3 次式 $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの余りが $x + 1$ で, $x^2 + 1$ で割ったときの余りが $x - 1$ であるとする。このとき, $f(x)$ を求めよ。

8

正の実数 a, b, c に対して, 不等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ を証明せよ。また, 等号が成り立つための条件を求めよ。

9

不等式 $\sqrt{x+3} > x+1$ を解け。

10

2 つの関数 $y = \sqrt{2x+4}$, $y = x+a$ のグラフの共有点の個数が a の値によってどのようになるかを調べよ。

【解答&解説】

1

【解答】 (1) $y \leq -3, -\frac{3}{2} \leq y$ (2) $y \leq -1, 1 \leq y$

2

【解答】 $x < 2 - \sqrt{2}, 2 < x < 2 + \sqrt{2}$

3

【解答】 $E(X) = \frac{8}{5}, V(X) = \frac{6}{25}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{6}}{5}$

4

【解答】 (1) $Y = 6X - 3$ (2) 期待値 6, 分散 27

5

【解答】

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	1	2	3	計
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{9}$
計	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	1

6

【解答】 $(x, y) = (2, 1), (3, 3), (2, 4)$

7

【解答】 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

8

【解答】 証明略, 等号が成り立つのは $a = b = c$ のとき

9

【解答】 $-3 \leq x < 1$

10

【解答】 $2 \leq a < \frac{5}{2}$ のとき 2 個; $a = \frac{5}{2}, a < 2$ のとき 1 個;

$a > \frac{5}{2}$ のとき 0 個

1

【解説】

$$(1) -\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{2(x+1)-1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 2$$

また $x = -2$ のとき $y = -3$

$x = 1$ のとき $y = -\frac{3}{2}$

よって, $y = -\frac{2x+1}{x+1}$ ($-2 \leq x \leq 1$) のグラフ

は右の図のようになり, 値域は

$$y \leq -3, -\frac{3}{2} \leq y$$

$$(2) \frac{2x-3}{3x-2} = \frac{\frac{2}{3}(3x-2) - \frac{5}{3}}{3x-2} = -\frac{5}{3(3x-2)} + \frac{2}{3}$$

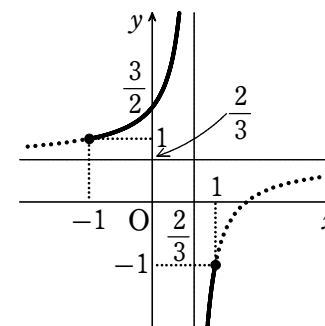
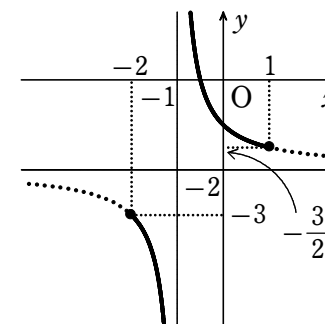
また $x = -1$ のとき $y = 1$

$x = 1$ のとき $y = -1$

よって, $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフは

右の図のようになり, 値域は

$$y \leq -1, 1 \leq y$$



2

解説

$$-\frac{2}{x-2}=2-x \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{とすると}$$

$$\text{両辺に } x-2 \text{ を掛けて} \quad -2=(2-x)(x-2)$$

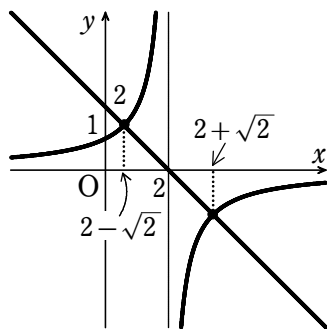
$$\text{整理すると} \quad x^2-4x+2=0$$

$$\text{よって} \quad x=2\pm\sqrt{2}$$

これらは①の分母を0にしないから、①の解である。

$$y=-\frac{2}{x-2} \text{ のグラフが } y=2-x \text{ のグラフより}$$

$$\text{下側にある } x \text{ の値の範囲を求めて} \quad x < 2-\sqrt{2}, \quad 2 < x < 2+\sqrt{2}$$



3

解説

取り出したカードの数字の組合せは、(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3)の場合がある。

X のとりうる値は $X=1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ であり

$$P(X=1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$

$$P\left(X=\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10},$$

$$P\left(X=\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

よって、 X の確率分布は右の表のようになるから

$$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{5}$$

$$V(X) = \left\{ 1^2 \cdot \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} \right\} - \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

	1回目	2回目	平均
1	(3/5)	1 (2/4) 1	3/2
		2 (1/4) 3/2	
		3 (1/4) 2	
2	(1/5)	1 (3/4) 3/2	5/2
		3 (1/4) 5/2	
3	(1/5)	1 (3/4) 2	5/2
		2 (1/4) 5/2	

X	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$= \frac{14}{5} - \frac{64}{25} = \frac{70-64}{25} = \frac{6}{25}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

4

解説

(1) 表の出た回数が X のとき、裏の出た回数は $3-X$ であるから

$$Y = 5X - (3 - X) = 6X - 3$$

(2) X のとりうる値は0, 1, 2, 3である。

それぞれの値をとる確率は

$$P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{よって} \quad E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{したがって} \quad E(Y) = E(6X - 3) = 6E(X) - 3 = 6 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 6$$

$$V(Y) = V(6X - 3) = 6^2 V(X) = 36 \cdot \frac{3}{4} = 27$$

5

解説

X のとりうる値は1, 2, 3, Y のとりうる値も1, 2, 3であり

$$P(X=1, Y=1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}, \quad P(X=1, Y=2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1, Y=3) = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{9}, \quad P(X=2, Y=1) = \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=2, Y=2)=\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}=\frac{1}{12}, \quad P(X=2, Y=3)=\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}=\frac{1}{12},$$

$$P(X=3, Y=1)=\frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8}=\frac{1}{9}, \quad P(X=3, Y=2)=\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8}=\frac{1}{12},$$

$$P(X=3, Y=3)=\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}=\frac{1}{36}$$

よって、 X, Y の同時分布は右の表のようになる。

$\begin{array}{c} Y \\ X \end{array}$	1	2	3	計
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{9}$
計	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	1

6

解説

$$x^2 - xy + y^2 - 3y = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この x の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-y)^2 - 4(y^2 - 3y) = -3y^2 + 12y = -3y(y - 4)$$

① の解は整数 (実数) であるから $D \geq 0$

$$\text{よって} \quad -3y(y - 4) \geq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad 0 \leq y \leq 4$$

y は正の整数であるから $y = 1, 2, 3, 4$

[1] $y = 1$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ は } x^2 - x - 2 = 0 \text{ であるから} \quad x = 2, -1$$

[2] $y = 2$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ は } x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ であるから} \quad x = 1 \pm \sqrt{3}$$

[3] $y = 3$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ は } x^2 - 3x = 0 \text{ であるから} \quad x = 0, 3$$

[4] $y = 4$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ は } x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ であるから} \quad x = 2$$

以上から、 x, y がともに正の整数となるものは $(x, y) = (2, 1), (3, 3), (2, 4)$

7

解説

3 次式 $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの余りが $x + 1$ であるから、 $p \neq 0$ として

$$f(x) = (px + q)(x^2 + x + 1) + x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおける。

① の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= (px + q)(x^2 + 1) + px^2 + (q + 1)x + 1 \\ &= (px + q)(x^2 + 1) + p(x^2 + 1) - p + (q + 1)x + 1 \\ &= (px + p + q)(x^2 + 1) + (q + 1)x - p + 1 \end{aligned}$$

さらに、 $f(x)$ を $x^2 + 1$ で割ったときの余りが $x - 1$ であるから

$$(q + 1)x - p + 1 = x - 1$$

これが x についての恒等式であるから $q + 1 = 1, -p + 1 = -1$

これを解いて $p = 2, q = 0$ このとき、 $p \neq 0$ を満たす。

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad f(x) = 2x(x^2 + x + 1) + x + 1 = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

別解 3 次式 $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの余りが $x + 1$ であるから、 $p \neq 0$ として

$$f(x) = (px + q)(x^2 + x + 1) + x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおける。

また、 $f(x)$ を $x^2 + 1$ で割ったときの商を $g(x)$ とすると、余りが $x - 1$ であるから

$$f(x) = (x^2 + 1)g(x) + x - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x = i \text{ (} i \text{ は虚数単位) を } \textcircled{2} \text{ に代入すると, } i^2 + 1 = 0 \text{ より} \quad f(i) = i - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

① に $x = i$ を代入すると

$$f(i) = (pi + q)(i^2 + i + 1) + i + 1 = (q + 1)i - p + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より} \quad i - 1 = (q + 1)i - p + 1$$

$$\text{すなわち} \quad p - 2 - qi = 0$$

$$p - 2, -q \text{ は実数であるから} \quad p - 2 = 0, -q = 0$$

$$\text{よって} \quad p = 2, q = 0 \quad \text{このとき, } p \neq 0 \text{ を満たす。}$$

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad f(x) = 2x(x^2 + x + 1) + x + 1 = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

8

解説

$a+b+c>0$ であるから、両辺に $a+b+c$ を掛けた不等式 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ を証明する。

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &= 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \\ &= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\end{aligned}$$

各項はすべて正であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2 \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}}=2 \quad \dots\dots ②$$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2 \quad \dots\dots ③$$

$$\text{よって} \quad (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3+2+2+2=9$$

$$\text{したがって、} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{9}{a+b+c} \text{ が成り立つ。}$$

等号が成り立つのは、①、②、③のすべてについて等号が成り立つときであるから

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a} \text{ かつ } \frac{b}{c}=\frac{c}{b} \text{ かつ } \frac{c}{a}=\frac{a}{c}$$

$$\text{すなわち} \quad a^2=b^2 \text{ かつ } b^2=c^2 \text{ かつ } c^2=a^2$$

a, b, c は正の実数であるから $a=b=c$ のときである。

別解 $a>0, b>0, c>0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc} \quad \dots\dots ④$$

また、 $\frac{1}{a}>0, \frac{1}{b}>0, \frac{1}{c}>0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} \quad \dots\dots ⑤$$

④、⑤の両辺はいずれも正であるから、辺々を掛けて

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\times\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$$

$$\text{したがって、} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{9}{a+b+c} \text{ が成り立つ。}$$

等号が成り立つのは、④、⑤の両方について等号が成り立つときであるから

$$a=b=c \text{ かつ } \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$$

したがって、 $a=b=c$ のときである。

9

解説

$$\sqrt{x+3}=x+1 \quad \dots\dots ① \text{ とすると}$$

$$\text{両辺を 2 乗すると} \quad x+3=(x+1)^2 \quad \text{整理して} \quad x^2+x-2=0$$

$$\text{よって} \quad (x+2)(x-1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=-2, 1$$

$$x=-2 \text{ のとき、①において} \quad (\text{左辺})=\sqrt{-2+3}=1, (\text{右辺})=-2+1=-1$$

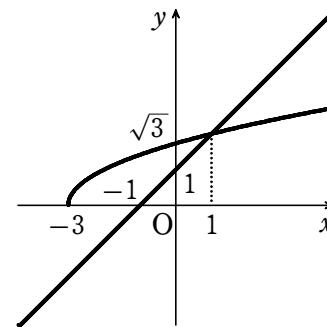
$$x=1 \text{ のとき、①において} \quad (\text{左辺})=\sqrt{1+3}=2, (\text{右辺})=1+1=2$$

$$\text{よって、①の解は} \quad x=1$$

$$y=\sqrt{x+3} \text{ のグラフが } y=x+1 \text{ のグラフより}$$

上側にある x の値の範囲を求めて

$$-3\leq x<1$$



10

解説

$$\sqrt{2x+4}=x+a \text{ とおいて、両辺を 2 乗すると} \quad 2x+4=(x+a)^2$$

$$\text{よって} \quad x^2+2(a-1)x+a^2-4=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a^2-4) = -2a+5$$

$y = \sqrt{2x+4}$ と $y = x+a$ のグラフが接するとき、 $D=0$ であるから $a = \frac{5}{2}$

また、 $y = x+a$ のグラフが点 $(-2, 0)$ を通るとき

$$a = 2$$

よって、図から、共有点の個数は

$2 \leq a < \frac{5}{2}$ のとき 2 個

$a = \frac{5}{2}$, $a < 2$ のとき 1 個

$a > \frac{5}{2}$ のとき 0 個

