

【定期試験対策講習】

2 学期 中間 考查 対策教材②

中 2 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 K「2 次関数」中盤

数学 M「整数」前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

【問題】

1

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

- (1) $x=3$ で最小値 2 をとり, $x=5$ のとき $y=10$ となる。
- (2) 軸が直線 $x=1$ で, 点 $(3, -1)$ を通り, y 軸と点 $(0, 2)$ で交わる。
- (3) 3 点 $(-1, -6)$, $(1, -2)$, $(3, 10)$ を通る。

2

a は定数とする。放物線 $y=x^2-2x+a$ について

- (1) 直線 $y=2x$ と接するように a の値を定めよ。
- (2) 直線 $y=2x+3$ と共有点をもたないように a の値の範囲を定めよ。

3

k を定数とする。 x の方程式 $kx^2-4x+k+3=0$ がただ1つの実数解をもつような k の値を求めよ。

4

等式 $19x+26y=1$ を満たす整数 x, y の組を互除法を用いて1つ求めよ。

5

方程式 $9x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

6

7^{50} について, 次のものを合同式を用いて求めよ。

- (1) 12 で割った余り
- (2) 一の位の数

7

次の合同式を満たす x を, それぞれの法 m において, $x \equiv a \pmod{m}$ の形で表せ。ただし, a は m より小さい自然数とする。

- (1) $7x \equiv 3 \pmod{5}$
- (2) $5x \equiv 15 \pmod{13}$
- (3) $4x \equiv 8 \pmod{12}$

8

n は自然数とする。 $n^2-18n+56$ が素数となるような n をすべて求めよ。

9

n は整数とする。 n^2+3n-1 は5の倍数でないことを証明せよ。

10

n は整数とする。 n^3+5n は6の倍数であることを証明せよ。

【解答&解説】

1

【解答】 (1) $y=2(x-3)^2+2$ ($y=2x^2-12x+20$)

(2) $y=-(x-1)^2+3$ ($y=-x^2+2x+2$) (3) $y=x^2+2x-5$

2

【解答】 (1) $a=4$ (2) $a>7$

3

【解答】 $k=-4, 0, 1$

4

【解答】 $x=11, y=-8$

5

【解答】 $x=5k-1, y=-9k+2$ (k は整数)

6

【解答】 (1) 1 (2) 9

7

【解答】 (1) $x \equiv 4 \pmod{5}$ (2) $x \equiv 3 \pmod{13}$ (3) $x \equiv 2 \pmod{3}$

8

【解答】 $n=3, 15$

9

【解答】 略

10

【解答】 略

1

【解説】

(1) $x=3$ で最小値 2 をとるから、求める 2 次関数は $y=a(x-3)^2+2$ ($a>0$) と表される。
 $x=5$ のとき $y=10$ となるから

$$10=a(5-3)^2+2 \quad \text{ゆえに} \quad a=2 \quad \text{これは} \quad a>0 \quad \text{を満たす。}$$

よって、求める 2 次関数は

$$y=2(x-3)^2+2 \quad (\text{または} \quad y=2x^2-12x+20)$$

(2) 軸が直線 $x=1$ であるから、求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2+q$ と表される。

グラフが 2 点 $(3, -1), (0, 2)$ を通るから $-1=4a+q, 2=a+q$

これを解くと $a=-1, q=3$

よって、求める 2 次関数は $y=-(x-1)^2+3$ ($y=-x^2+2x+2$)

(3) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが 3 点 $(-1, -6), (1, -2), (3, 10)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=-6 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a+b+c=-2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 9a+3b+c=10 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②-① から $2b=4$ よって $b=2$

③-② から $8a+2b=12$ よって $4a+b=6$ $\cdots \cdots \textcircled{4}$

$b=2$ を ④ に代入して $4a+2=6$ ゆえに $a=1$

$a=1, b=2$ を ② に代入して $1+2+c=-2$ ゆえに $c=-5$

よって、求める 2 次関数は $y=x^2+2x-5$

2

【解説】

(1) $y=x^2-2x+a$ $\cdots \cdots \textcircled{1}$, $y=2x$ $\cdots \cdots \textcircled{2}$ とおく。

①, ② から y を消去すると $x^2-2x+a=2x$

整理すると $x^2-4x+a=0$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

③ について、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1 \cdot a=4-a$$

放物線 ① と 直線 ② が接するための条件は、2 次方程式 ③ が重解をもつことであるから
 $D=0$ すなわち $a=4$

(2) $y=x^2-2x+a$ $\cdots \cdots \textcircled{1}$, $y=2x+3$ $\cdots \cdots \textcircled{2}$ とおく。

①, ② から y を消去すると $x^2-2x+a=2x+3$

整理すると $x^2-4x+a-3=0$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

③ について、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(a-3)=-a+7$$

放物線①と直線②が共有点をもたないための条件は、2次方程式③が実数解をもたないことであるから

$$D<0 \quad \text{すなわち} \quad a>7$$

3

解説

[1] $k=0$ のとき、方程式は $-4x+3=0$

よって、 $x=\frac{3}{4}$ となり、ただ1つの実数解をもつ。

[2] $k \neq 0$ のとき、2次方程式 $kx^2-4x+k+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k(k+3)=-k^2-3k+4=-(k^2+3k-4)=-(k-1)(k+4)$$

ただ1つの実数解をもつのは $D=0$ のときである。

ゆえに $(k-1)(k+4)=0$ よって $k=1, -4$

これは、 $k \neq 0$ を満たす。

以上から、求める k の値は $k=-4, 0, 1$

4

解説

$$26=19 \cdot 1+7 \quad \text{移項すると} \quad 7=26-19 \cdot 1$$

$$19=7 \cdot 2+5 \quad \text{移項すると} \quad 5=19-7 \cdot 2$$

$$7=5 \cdot 1+2 \quad \text{移項すると} \quad 2=7-5 \cdot 1$$

$$5=2 \cdot 2+1 \quad \text{移項すると} \quad 1=5-2 \cdot 2$$

よって $1=5-2 \cdot 2=5-(7-5 \cdot 1) \cdot 2$

$$=5 \cdot 3-7 \cdot 2=(19-7 \cdot 2) \cdot 3-7 \cdot 2$$

$$=19 \cdot 3+7 \cdot (-8)=19 \cdot 3+(26-19 \cdot 1) \cdot (-8)$$

$$=19 \cdot 11+26 \cdot (-8)$$

すなわち $19 \cdot 11+26 \cdot (-8)=1 \quad \dots\dots ①$

したがって、求める整数 x, y の組の1つは

$$x=11, y=-8$$

5

解説

$$9x+5y=1 \quad \dots\dots ①$$

$x=-1, y=2$ は①の整数解の1つである。

よって $9 \cdot (-1)+5 \cdot 2=1 \quad \dots\dots ②$

①-② から $9(x+1)+5(y-2)=0$

すなわち $9(x+1)=-5(y-2) \quad \dots\dots ③$

9と5は互いに素であるから、 $x+1$ は5の倍数である。

ゆえに、 k を整数として、 $x+1=5k$ と表される。

③に代入して $9 \cdot 5k=-5(y-2)$ すなわち $y-2=-9k$

よって、解は $x=5k-1, y=-9k+2$ (k は整数)

6

解説

(1) $7^2 \equiv 49 \equiv 1 \pmod{12}$ であるから $7^{50} \equiv (7^2)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod{12}$

よって、求める余りは 1

(2) $7^2 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10}, \quad 7^3 \equiv 7^2 \cdot 7 \equiv 9 \cdot 7 \equiv 63 \equiv 3 \pmod{10}$

$$7^4 \equiv 7^3 \cdot 7 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 21 \equiv 1 \pmod{10}$$

よって $7^{50} \equiv (7^4)^{12} \cdot 7^2 \equiv 1^{12} \cdot 49 \equiv 9 \pmod{10}$

したがって、 7^{50} の一の位は 9

注意 $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m}$ は、 $a \equiv b \equiv c \pmod{m}$ と書く。

7

解説

(1) $7x \equiv 3 \pmod{5}$ の両辺に3を掛けて $21x \equiv 9 \pmod{5}$

$21x \equiv 1 \cdot x \equiv x \pmod{5}, 9 \equiv 4 \pmod{5}$ であるから $x \equiv 4 \pmod{5}$

(2) $5x \equiv 15 \pmod{13} \Leftrightarrow 5x-15=13k$ (k は整数) $\Leftrightarrow 5(x-3)=13k$

5と13は互いに素な自然数であるので、 $x-3=13l$ (l は整数)

$\therefore x \equiv 3 \pmod{13}$

(3) $4x \equiv 8 \pmod{12} \Leftrightarrow 4x-8=12k$ (k は整数) $\Leftrightarrow x-2=3k$

$\therefore x \equiv 2 \pmod{3}$

8

解説

$$\begin{aligned}n^2 - 18n + 56 &= (n-4)(n-14) \\ &= (4-n)(14-n)\end{aligned}$$

$n-4 > n-14$, $4-n < 14-n$ であるから, $n^2 - 18n + 56$ が素数であるとき

$$n-14=1 \quad \text{または} \quad 4-n=1$$

$$n-14=1 \text{ から } n=15 \quad 4-n=1 \text{ から } n=3$$

$$n=15 \text{ のとき } n^2 - 18n + 56 = 11 \cdot 1 = 11 \text{ (素数)}$$

$$n=3 \text{ のとき } n^2 - 18n + 56 = 1 \cdot 11 = 11 \text{ (素数)}$$

よって, 求める n は $n=3, 15$

9

解説

すべての整数 n は

$$n=5k, \quad n=5k+1, \quad n=5k+2, \quad n=5k+3, \quad n=5k+4 \quad (k \text{ は整数})$$

のいずれかの形で表される。

[1] $n=5k$ のとき

$$\begin{aligned}n^2 + 3n - 1 &= (5k)^2 + 3 \cdot 5k - 1 = 25k^2 + 15k - 1 \\ &= 5(5k^2 + 3k - 1) + 4\end{aligned}$$

[2] $n=5k+1$ のとき

$$\begin{aligned}n^2 + 3n - 1 &= (5k+1)^2 + 3(5k+1) - 1 = 25k^2 + 25k + 3 \\ &= 5(5k^2 + 5k) + 3\end{aligned}$$

[3] $n=5k+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^2 + 3n - 1 &= (5k+2)^2 + 3(5k+2) - 1 = 25k^2 + 35k + 9 \\ &= 5(5k^2 + 7k + 1) + 4\end{aligned}$$

[4] $n=5k+3$ のとき

$$\begin{aligned}n^2 + 3n - 1 &= (5k+3)^2 + 3(5k+3) - 1 = 25k^2 + 45k + 17 \\ &= 5(5k^2 + 9k + 3) + 2\end{aligned}$$

[5] $n=5k+4$ のとき

$$n^2 + 3n - 1 = (5k+4)^2 + 3(5k+4) - 1 = 25k^2 + 55k + 27$$

$$= 5(5k^2 + 11k + 5) + 2$$

いずれの場合も, $n^2 + 3n - 1$ は 5 の倍数でない。

したがって, $n^2 + 3n - 1$ は 5 の倍数でない。

10

解説

$$\begin{aligned}n^3 + 5n &= (n^3 - n) + 6n = n(n^2 - 1) + 6n \\ &= (n-1)n(n+1) + 6n\end{aligned}$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから, 6 の倍数である。

また, $6n$ も 6 の倍数である。

よって, $n^3 + 5n$ は 6 の倍数である。