

【定期試験対策講習】

2 学期 中間 考查 対策教材①

高 1 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 Y「積分」後半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

【問題】

1

定積分 $\int_0^2 |x^2 + 3x - 4| dx$ を求めよ。

2

2つの曲線 $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + x + 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

3

放物線 $y = x^2 - x + 3$ に点 $(1, -1)$ から引いた2つの接線と放物線とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

4

放物線 $y = 2x - x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を直線 $y = kx$ が2等分するように、定数 k の値を定めよ。

5

放物線 $y = x^2$ と点 $(1, 2)$ を通る直線とで囲まれた図形の面積が最小になるとき、その直線の方程式を求めよ。

6

曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ と直線 $y = mx$ で囲まれた2つの図形の面積が等しくなるような定数 m の値を求めよ。ただし、 $0 < m < 9$ とする。

7

$f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx| dx$ とする。 $f(t)$ の最小値と、最小値を与える t の値を求めよ。

8

2つの放物線 $y = x^2 + x + 2$, $y = x^2 - 7x + 10$ の両方に接する直線とこの2つの放物線で囲まれる部分の面積を求めよ。

【解答&解説】

1

解答 5

2

解答 $\frac{125}{24}$

3

解答 $\frac{16}{3}$

4

解答 $k=2-\sqrt[3]{4}$

5

解答 $y=2x$

6

解答 $m=1$

7

解答 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

8

解答 $\frac{16}{3}$

1

解説

$$|x^2+3x-4|=|(x+4)(x-1)|$$

$0 \leq x \leq 1$ のとき

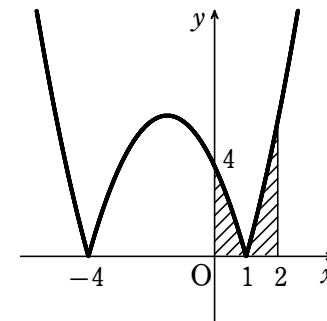
$$|x^2+3x-4|=-(x^2+3x-4)$$

$1 \leq x \leq 2$ のとき

$$|x^2+3x-4|=x^2+3x-4$$

したがって

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^1 \{-(x^2+3x-4)\} dx + \int_1^2 (x^2+3x-4) dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_1^2 \\ &= 5 \end{aligned}$$



2

解説

2 曲線の交点の x 座標は, $x^2-2x=-x^2+x+2$

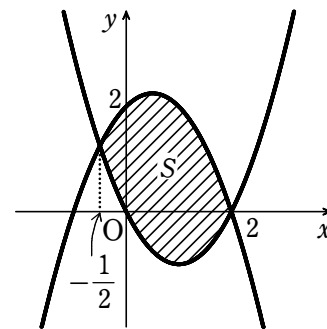
すなわち $2x^2-3x-2=0$ を解くと

$$(2x+1)(x-2)=0 \text{ から } x=-\frac{1}{2}, 2$$

よって, 右の図から, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^2 \{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^2 (-2x^2+3x+2) dx \end{aligned}$$

$$= -2 \int_{-\frac{1}{2}}^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2) dx = -2 \left(-\frac{1}{6}\right) \left\{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3 = \frac{125}{24}$$



3

解説

$y=x^2-x+3$ を微分すると $y'=2x-1$

接点の座標を $(t, t^2 - t + 3)$ とすると、この点における接線の方程式は

$$y - (t^2 - t + 3) = (2t - 1)(x - t)$$

すなわち $y = (2t - 1)x - t^2 + 3 \quad \dots\dots ①$

これが点 $(1, -1)$ を通るとき

$$-1 = (2t - 1) \cdot 1 - t^2 + 3$$

整理して $t^2 - 2t - 3 = 0$

これを解いて $t = -1, 3$

よって、2つの接線の方程式は、①に $t = -1, 3$ を

代入して $y = -3x + 2, y = 5x - 6$

グラフから、求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^1 \{(x^2 - x + 3) - (-3x + 2)\} dx + \int_1^3 \{(x^2 - x + 3) - (5x - 6)\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

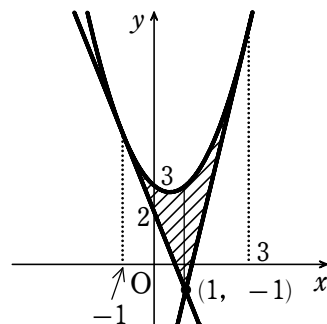
$$= 2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_1^3 = \frac{16}{3}$$

別解 [積分の計算]

$$S = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_{-1}^1 (x + 1)^2 dx + \int_1^3 (x - 3)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}(x - 3)^3 \right]_1^3 = \frac{16}{3}$$



4

解説

放物線 $y = 2x - x^2$ と直線 $y = kx$ で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする。

この放物線と直線の交点の x 座標は、方程式

$$2x - x^2 = kx \text{ を解いて } x = 0, 2 - k$$

条件を満たすとき $0 < 2 - k < 2$

よって $0 < k < 2 \quad \dots\dots ①$

このとき $S(k) = \int_0^{2-k} \{(2x - x^2) - kx\} dx$

$$= - \int_0^{2-k} x \{x - (2 - k)\} dx = \frac{1}{6}(2 - k)^3$$

放物線と x 軸で囲まれた図形の面積は $S(0)$ であるから、面積を 2 等分するとき

$$2S(k) = S(0) \quad \text{すなわち} \quad 2 \cdot \frac{1}{6}(2 - k)^3 = \frac{1}{6} \cdot 2^3$$

よって $(2 - k)^3 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad 2 - k = \sqrt[3]{4}$

したがって $k = 2 - \sqrt[3]{4} \quad (\text{これは } ① \text{ を満たす})$

5

解説

x 軸に垂直な直線は適さないから、求める直線の方程式は $y = m(x - 1) + 2$ とおける。

放物線と直線とは異なる 2 点で交わり、その x 座標は、

方程式 $x^2 = m(x - 1) + 2$

すなわち $x^2 - mx + m - 2 = 0 \quad \dots\dots ①$

の 2 つの実数解である。

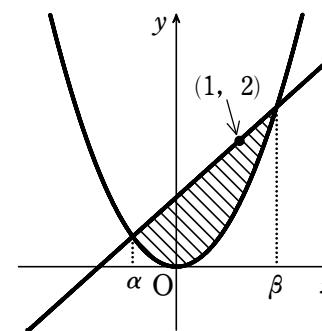
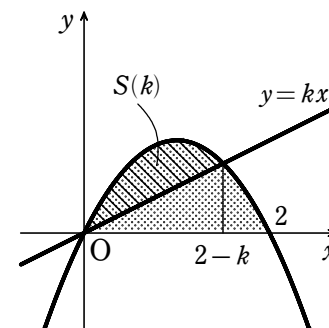
その解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、放物線と直線で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{m(x - 1) + 2 - x^2\} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

① を解くと $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4(m - 2)}}{2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2}$

よって $\beta - \alpha = \sqrt{m^2 - 4m + 8} = \sqrt{(m - 2)^2 + 4}$



ゆえに $S = \frac{1}{6} \{ \sqrt{(m-2)^2 + 4} \}^3$

よって、 S は $m=2$ のとき最小になる。

したがって、求める直線の方程式は $y=2(x-1)+2$ すなわち $y=2x$

〔別解〕 $S = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ において、 $\beta-\alpha$ の計算は、解と係数の関係を利用してもよい。

① において、解と係数の関係から $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m-2$

$$\begin{aligned} \text{よって } (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2 - 4(m-2) \\ &= (m-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\beta-\alpha > 0 \text{ であるから } \beta-\alpha = \sqrt{(m-2)^2 + 4}$$

〔6〕

〔解説〕

曲線と直線の交点の x 座標は、 $x^3-6x^2+9x=mx$ を解

$$\text{くと, } x(x-3)^2=mx \text{ から } x\{(x-3)^2-m\}=0$$

$$0 < m < 9 \text{ であるから } x=0, 3 \pm \sqrt{m}$$

ここで、 $3-\sqrt{m}=\alpha$, $3+\sqrt{m}=\beta$ とおくと

$$0 < \alpha < \beta$$

2つの図形の面積が等しくなるための条件は

$$\int_0^\alpha \{(x^3-6x^2+9x)-mx\}dx = \int_\alpha^\beta \{mx-(x^3-6x^2+9x)\}dx$$

$$\text{したがって } \int_0^\beta \{x^3-6x^2+(9-m)x\}dx = 0$$

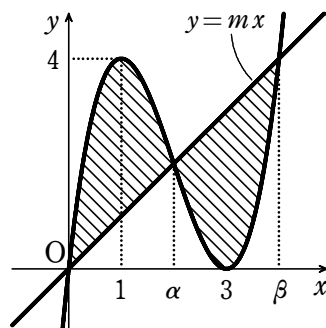
$$\text{左辺の定積分を } I \text{ とすると } I = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9-m}{2}x^2 \right]_0^\beta = \frac{\beta^2}{4} \{ \beta^2 - 8\beta + 2(9-m) \}$$

$$I=0 \text{ のとき, } \beta \neq 0 \text{ であるから } \beta^2 - 8\beta + 2(9-m) = 0$$

$$3+\sqrt{m}=\beta \text{ を代入して } m+2\sqrt{m}-3=0$$

$$\text{よって } (\sqrt{m}-1)(\sqrt{m}+3)=0$$

$$\sqrt{m}+3 > 0 \text{ であるから } \sqrt{m}=1 \text{ すなわち } m=1 \text{ (} 0 < m < 9 \text{ を満たす)}$$



〔7〕

〔解説〕

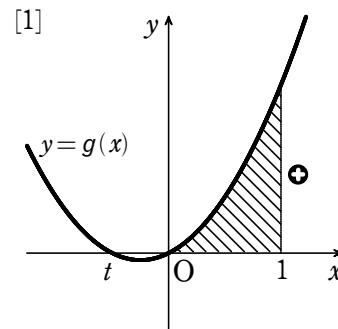
$g(x) = x^2 - tx$ とする。

$$g(x)=0 \text{ の解は } x=0, t$$

[1] $t \leq 0$ のとき

$$0 \leq x \leq 1 \text{ では } g(x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(t) &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x^2 - tx) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{t}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

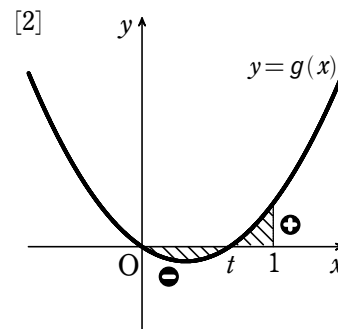


[2] $0 < t < 1$ のとき

$$0 \leq x \leq t \text{ では } g(x) \leq 0,$$

$$t \leq x \leq 1 \text{ では } g(x) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(t) &= -\int_0^t g(x) dx + \int_t^1 g(x) dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{t}{2}x^2 \right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{t}{2}x^2 \right]_t^1 \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$



$$f'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$f'(t) = 0 \text{ とすると } t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

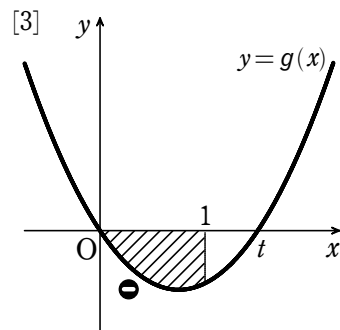
$0 < t < 1$ における増減表は右のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	

[3] $t \geq 1$ のとき

$$0 \leq x \leq 1 \text{ では } g(x) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(t) &= -\int_0^1 g(x) dx \\ &= -\left(\frac{1}{3} - \frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

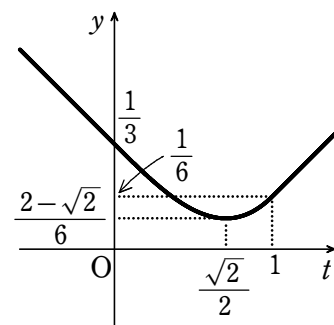


以上から、 $y=f(t)$ のグラフは、右の図のようになる。

したがって、 $f(t)$ は

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

をとる。



8

解説

$$y = x^2 + x + 2 \text{ から } y' = 2x + 1$$

この放物線上の点 $(a, a^2 + a + 2)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 + a + 2) = (2a + 1)(x - a)$$

$$\text{すなわち } y = (2a + 1)x - a^2 + 2 \quad \dots\dots ①$$

直線 ① が $y = x^2 - 7x + 10$ にも接するための条件は、 y を消去した 2 次方程式

$$x^2 - 7x + 10 = (2a + 1)x - a^2 + 2$$

$$\text{すなわち } x^2 - (2a + 8)x + a^2 + 8 = 0$$

が重解をもつことである。

ゆえに、この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{-(a+4)\}^2 - (a^2 + 8) = 0$$

$$\text{よって } 8a + 8 = 0 \quad \text{これを解いて } a = -1$$

$$\text{① から、両方の放物線に接する直線の方程式は } y = -x + 1$$

$$y = x^2 - 7x + 10 \text{ との接点の } x \text{ 座標は } x^2 - 7x + 10 = -x + 1 \text{ を}$$

$$\text{解いて } x = 3$$

$$\text{また、2 つの放物線の交点の } x \text{ 座標は } x^2 + x + 2 = x^2 - 7x + 10$$

$$\text{を解いて } x = 1$$

したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(x^2 + x + 2) - (-x + 1)\} dx \\ &\quad + \int_1^3 \{(x^2 - 7x + 10) - (-x + 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x + 1)^2 dx + \int_1^3 (x - 3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}(x - 3)^3 \right]_1^3 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

