

【定期試験対策講習】

2 学期 中間 考查 対策教材①

中 3 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 Y「精練」8 章まで
数学 T「三角関数」前半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

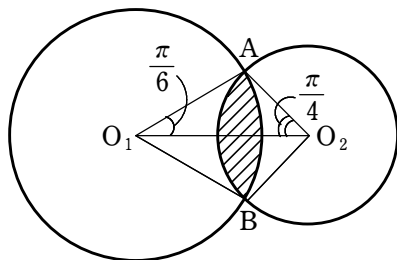
間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを
してください。

【問題】

1

半径 2 の円 O_1 と半径 $\sqrt{2}$ の円 O_2 が 2 点 A, B で交わり, $\angle AO_1O_2 = \frac{\pi}{6}$, $\angle AO_2O_1 = \frac{\pi}{4}$ である。

- (1) 扇形 O_1AB (ただし, 小さい方) の弧の長さと面積を求めよ。
- (2) 2 円 O_1, O_2 の重なり合う部分の周の長さと面積を求めよ。



2

θ の動径が第 3 象限にあり, $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

- (1) $\sin \theta + \cos \theta$
- (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

3

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta + \pi) + \sin\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right) + \sin(\theta + 2\pi)$ を簡単にせよ。

4

関数 $y = 4\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\pi\right)$ のグラフは, $y = \cos\frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\boxed{}$ π だけ

平行移動し, θ 軸をもとにして y 軸方向に $\boxed{}$ 倍に拡大したものである。

また, この関数の周期は $\boxed{}$ π である。

5

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

- (1) $2\sin^2 \theta + \cos \theta - 2 = 0$
- (2) $2\cos^2 \theta \leq 3\sin \theta$

6

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの θ の値を求めよ。

- (1) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$
- (2) $y = 2\cos^2 \theta + 2\sin \theta + 1 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

7

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

- (1) $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (2) $\tan\left(2\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \leq -\sqrt{3}$

8

ある放物線を y 軸に関して対称移動し, 更に x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動すると, 放物線 $y = -2x^2 + 16x - 29$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

9

x, y が $x^2 + 2y^2 = 1$ を満たすとき, $\frac{1}{2}x + y^2$ の最大値と最小値, およびそのときの x, y の値を求めよ。

10

2 次関数 $y = -x^2 + (m - 10)x - m - 14$ のグラフが次の条件を満たすとき, 定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) x 軸の正の部分と負の部分で交わる。
- (2) x 軸の負の部分と y 軸のみ共有点をもつ。
- (3) x 軸の $x > 1$ の部分と, 異なる 2 点で交わる。

【解答&解説】

1

【解答】 (1) 弧の長さ $\frac{2}{3}\pi$, 面積 $\frac{2}{3}\pi$ (2) 周の長さ $\frac{4+3\sqrt{2}}{6}\pi$, 面積 $\frac{7}{6}\pi - \sqrt{3} - 1$

2

【解答】 (1) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ (2) $-\frac{2\sqrt{15}}{9}$

3

【解答】 0

4

【解答】 (ア) 3 (イ) 4 (ウ) 4

5

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$ (2) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$

6

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ で最大値 1, $\theta = \pi$ で最小値 $-\frac{1}{2}$
(2) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ で最大値 $\frac{7}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で最小値 -1

7

【解答】 (1) $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{11}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi < \theta < \frac{23}{12}\pi$
(2) $\frac{\pi}{12} < \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{7}{12}\pi < \theta \leq \frac{2}{3}\pi, \frac{13}{12}\pi < \theta \leq \frac{7}{6}\pi, \frac{19}{12}\pi < \theta \leq \frac{5}{3}\pi$

8

【解答】 $y = -2x^2 - 4x + 3$

9

【解答】 $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ のとき最大値 $\frac{5}{8}$, $(x, y) = (-1, 0)$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

10

【解答】 (1) $m < -14$ (2) $-14 < m \leq 2$ (3) $m > 22$

1

【解説】

(1) 扇形 O_1AB の中心角は

$$2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

よって、扇形 O_1AB の弧の長さは

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{面積は } \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

(2) 扇形 O_2AB の中心角は $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (ラジアン)

$$\text{よって、扇形 } O_2AB \text{ の弧の長さは } \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

したがって、2円 O_1, O_2 の重なり合う部分の周の長さは

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \frac{4+3\sqrt{2}}{6}\pi$$

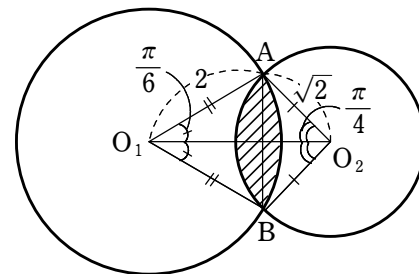
$$\text{扇形 } O_2AB \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

四角形 O_1BO_2A の面積は、正三角形 O_1AB と直角二等辺三角形 O_2AB の面積の和で

$$\text{あり } \triangle O_1AB + \triangle O_2AB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} + 1$$

よって、2円 O_1, O_2 の重なり合う部分の面積は

$$\begin{aligned} (\text{扇形 } O_1AB) + (\text{扇形 } O_2AB) - (\text{四角形 } O_1BO_2A) &= \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2} - (\sqrt{3} + 1) \\ &= \frac{7}{6}\pi - \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$



2

【解説】

$$(1) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

θ の動径が第3象限にあるから $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

よって $\sin \theta + \cos \theta < 0$

$$\text{ゆえに } \sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{\frac{5}{3}} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$(2) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= -\frac{\sqrt{15}}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{15}}{9}$$

別解 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$

$$= \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$

$$= -\frac{5\sqrt{15}}{9} + \frac{\sqrt{15}}{3} = -\frac{2\sqrt{15}}{9}$$

3

解説

$$\sin\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\left\{\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right\} = -\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta$$

よって (与式) $= \cos \theta + (-\sin \theta) + (-\cos \theta) + \sin \theta = 0$

4

解説

$$4\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\pi\right) = 4\cos\frac{1}{2}(\theta - 3\pi)$$

よって, $y = 4\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}\pi\right)$ のグラフは, $y = \cos\frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\nearrow 3\pi$ だけ平行移動し, θ 軸をもとにして y 軸方向に $\nearrow 4$ 倍に拡大したものである。

また, 周期は $2\pi \div \frac{1}{2} = \nearrow 4\pi$

5

解説

$$(1) 2\sin^2 \theta + \cos \theta - 2 = 0 \text{ から } 2(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta - 2 = 0$$

$$\text{整理すると } 2\cos^2 \theta - \cos \theta = 0 \quad \text{よって } \cos \theta (2\cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{ゆえに } \cos \theta = 0, \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから, } \cos \theta = 0 \text{ より } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{したがって, 解は } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

$$(2) 2\cos^2 \theta \leq 3\sin \theta \text{ から } 2(1 - \sin^2 \theta) \leq 3\sin \theta$$

$$\text{整理すると } 2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 \geq 0$$

$$\text{よって } (\sin \theta + 2)(2\sin \theta - 1) \geq 0$$

$\sin \theta + 2 > 0$ であるから

$$2\sin \theta - 1 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad \sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから, 解は } \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

6

解説

$$(1) 0 \leq \theta \leq \pi \text{ から } \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$$

よって, y は

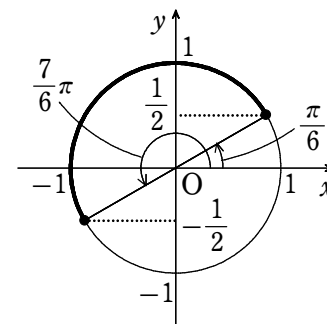
$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ で最大値 } 1,$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \text{ すなわち } \theta = \pi \text{ で最小値 } -\frac{1}{2}$$

をとる。

$$(2) y = 2(1 - \sin^2 \theta) + 2\sin \theta + 1$$

$$= -2\sin^2 \theta + 2\sin \theta + 3$$



$\sin \theta = t$ とおくと, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leq t \leq 1$ ①

y を t で表すと

$$y = -2t^2 + 2t + 3 = -2(t^2 - t) + 3$$

$$= -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$$

① の範囲において, y は

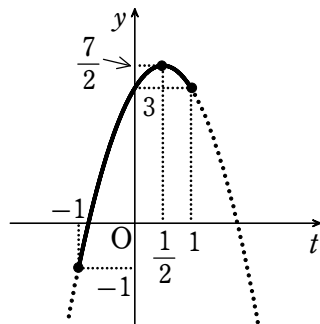
$$t = \frac{1}{2} \text{ で最大値 } \frac{7}{2},$$

$$t = -1 \text{ で最小値 } -1 \text{ をとる.}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ であるから, } t = \frac{1}{2} \text{ ならば } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$t = -1 \text{ ならば } \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{よって } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \text{ で最大値 } \frac{7}{2}, \theta = \frac{3}{2}\pi \text{ で最小値 } -1$$



7

解説

$$(1) \quad x = 2\theta + \frac{\pi}{3} \text{ とおく.}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ から } \frac{\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} < 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{すなわち } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{13}{3}\pi \text{ ①}$$

$$\text{① の範囲で } \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ を解くと } \frac{11}{6}\pi < x < \frac{13}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi < x < \frac{25}{6}\pi$$

$$\text{すなわち } \frac{11}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{3} < \frac{25}{6}\pi$$

$$\text{よって } \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{11}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi < \theta < \frac{23}{12}\pi$$

$$(2) \quad x = 2\theta - \frac{2}{3}\pi \text{ とおく.}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ から } -\frac{2}{3}\pi \leq 2\theta - \frac{2}{3}\pi < 2 \times 2\pi - \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{すなわち } -\frac{2}{3}\pi \leq x < \frac{10}{3}\pi \text{ ①}$$

① の範囲で $\tan x \leq -\sqrt{3}$ を解くと

$$-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi < x \leq \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{すなわち } -\frac{\pi}{2} < 2\theta - \frac{2}{3}\pi \leq -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < 2\theta - \frac{2}{3}\pi \leq \frac{2}{3}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi < 2\theta - \frac{2}{3}\pi \leq \frac{5}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi < 2\theta - \frac{2}{3}\pi \leq \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{よって } \frac{\pi}{12} < \theta \leq \frac{\pi}{6}, \frac{7}{12}\pi < \theta \leq \frac{2}{3}\pi, \frac{13}{12}\pi < \theta \leq \frac{7}{6}\pi, \frac{19}{12}\pi < \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

8

解説

求める放物線は, 放物線 $y = -2x^2 + 16x - 29$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動し, 更に y 軸に関して対称移動したものである。

まず, x 軸方向に -3 , y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

$$y - 2 = -2\{x - (-3)\}^2 + 16\{x - (-3)\} - 29$$

$$\text{よって } y = -2(x + 3)^2 + 16(x + 3) - 27$$

$$\text{すなわち } y = -2x^2 + 4x + 3$$

次に, y 軸に関して対称移動すると

$$y = -2(-x)^2 + 4(-x) + 3$$

$$\text{したがって, 求める放物線の方程式は } y = -2x^2 - 4x + 3$$

9

解説

$$x^2 + 2y^2 = 1 \text{ から } y^2 = \frac{1}{2}(1 - x^2) \text{ ①}$$

$$y^2 \geq 0 \text{ であるから } 1 - x^2 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)(x - 1) \leq 0$$

$$\text{よって } -1 \leq x \leq 1 \text{ ②}$$

① を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x + y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{8}\end{aligned}$$

これを $f(x)$ とおくと、② の範囲で $f(x)$ は

$$x = \frac{1}{2} \text{ で最大値 } \frac{5}{8}, \quad x = -1 \text{ で最小値 } -\frac{1}{2}$$

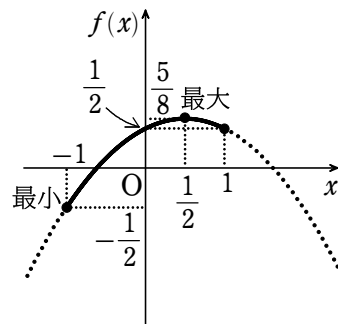
をとる。① から

$$x = \frac{1}{2} \text{ のとき } y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \pm \sqrt{\frac{3}{8}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$x = -1 \text{ のとき } y^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = 0$$

$$\text{したがって } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{6}}{4}\right) \text{ のとき最大値 } \frac{5}{8}$$

$$(x, y) = (-1, 0) \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{2}$$



10

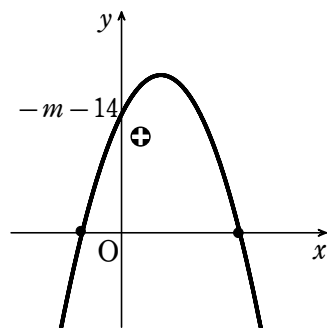
解説

$f(x) = -x^2 + (m-10)x - m - 14$ とし、 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D &= (m-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-m-14) \\ &= m^2 - 24m + 44 \\ &= (m-2)(m-22)\end{aligned}$$

(1) $y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから、 x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは、 $f(0) = -m - 14 > 0$ のときである。

したがって $m < -14$



(2) $y = f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分とのみ共有点をもつのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が共有点をもつから

$$D = (m-2)(m-22) \geq 0$$

$$\text{よって } m \leq 2, 22 \leq m \quad \dots\dots \text{①}$$

[2] グラフの軸は直線 $x = \frac{m-10}{2}$ で、この軸について

$$\frac{m-10}{2} < 0$$

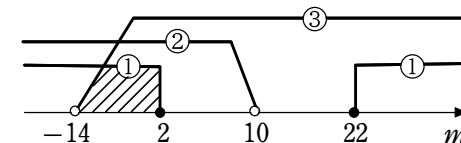
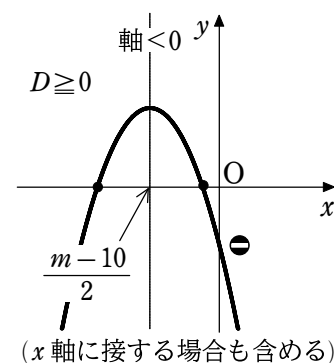
$$\text{よって } m < 10 \quad \dots\dots \text{②}$$

[3] $f(0) < 0$ であるから $-m - 14 < 0$

$$\text{よって } m > -14 \quad \dots\dots \text{③}$$

①, ②, ③ の共通範囲を求めて

$$-14 < m \leq 2$$



(3) $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $x > 1$ の部分と、異なる 2 点で交わるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わるから

$$D = (m-2)(m-22) > 0$$

$$\text{よって } m < 2, 22 < m \quad \dots\dots \text{①}$$

[2] グラフの軸：直線 $x = \frac{m-10}{2}$ について

$$\frac{m-10}{2} > 1 \quad \text{よって } m > 12 \quad \dots\dots \text{②}$$

[3] $f(1) < 0$ から

$$-1 + m - 10 - m - 14 = -25 < 0$$

これは常に成り立つ。

①, ② の共通範囲を求めて

$$m > 22$$

