

【定期試験対策講習】

2 学期 中間 考查 対策教材②

中 3 甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 Y「精練」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

【問題】

1

- (1) $a+b+c=5$, $ab+bc+ca=3$, $abc=-3$ のとき, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$, $a^4+b^4+c^4$ の値を求めよ。
- (2) $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$ の 2 重根号をはずして簡単にせよ。

2

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^4-7x^2y^2+y^4$ (2) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9$ (3) $a^3+6ab-8b^3+1$

3

2 次関数 $y=-x^2+(m-10)x-m-14$ のグラフが次の条件を満たすとき, 定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) x 軸の正の部分と負の部分で交わる。 (2) x 軸の負の部分とのみ共有点をもつ。
- (3) x 軸の $x>1$ の部分と, 異なる 2 点で交わる。

4

次の不等式を解け。ただし, a は定数とする。

- (1) $x^2+(2-a)x-2a\leq 0$ (2) $ax^2\leq ax$
- (3) $x^2-3ax+2a^2+a-1>0$

5

円に内接する四角形 ABCD がある。AB=1, BC=3, CD=3, DA=2 のとき

- (1) $\cos B$ の値を求めよ。 (2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

6

3 辺の長さが a , $a+2$, $a+4$ である三角形について考える。

- (1) この三角形が鈍角三角形であるとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) この三角形の 1 つの内角が 120° であるとき, a の値, 外接円の半径を求めよ。

7

$\sqrt{7}$ は無理数であることを証明せよ。ただし, n を自然数とすると, n^2 が 7 の倍数ならば, n は 7 の倍数であることを用いてよいものとする。

8

a , b が有理数のとき, $a+b\sqrt{2}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。ただし, $\sqrt{2}$ は無理数である。

9

A, B, C, D の 4 種類の商品を合わせて 10 個買うものとする。次のような買い方はそれぞれ何通りあるか。

- (1) 買わない商品があってもよいとき。
- (2) どの商品も少なくとも 1 個買うとき。
- (3) A は 3 個買い, B, C, D は少なくとも 1 個買うとき。

10

9 個の文字 M, A, T, H, C, H, A, R, T を横 1 列に並べる。

- (1) この並べ方は 通りある。
- (2) A と A が隣り合うような並べ方は 通りある。
- (3) A と A が隣り合い, かつ, T と T も隣り合うような並べ方は 通りある。
- (4) M, C, R がこの順に並ぶ並べ方は 通りある。
- (5) 2 個の A と C が A, C, A の順に並ぶ並べ方は 通りある。

【解答&解説】

1

【解答】 (1) 順に 19, 71, 283 (2) $2\sqrt{3} + 1$

2

【解答】 (1) $(x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$ (2) $(x^2 - 8x + 6)(x - 4)^2$
(3) $(a - 2b + 1)(a^2 + 2ab + 4b^2 - a + 2b + 1)$

3

【解答】 (1) $m < -14$ (2) $-14 < m \leq 2$ (3) $m > 22$

4

【解答】 (1) $a < -2$ のとき $a \leq x \leq -2$, $a = -2$ のとき $x = -2$,
 $a > -2$ のとき $-2 \leq x \leq a$
(2) $a > 0$ のとき $0 \leq x \leq 1$; $a = 0$ のとき すべての実数;
 $a < 0$ のとき $x \leq 0$, $1 \leq x$
(3) $a > 2$ のとき $x < a + 1$, $2a - 1 < x$; $a = 2$ のとき $x < 3$, $3 < x$;
 $a < 2$ のとき $x < 2a - 1$, $a + 1 < x$

5

【解答】 (1) $\cos B = -\frac{1}{6}$ (2) $\frac{3\sqrt{35}}{4}$

6

【解答】 (1) $2 < a < 6$ (2) $a = 3$, 外接円の半径は $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

7

【解答】 略

8

【解答】 略

9

【解答】 (1) 286 通り (2) 84 通り (3) 15 通り

10

【解答】 (1) 45360 (2) 10080 (3) 2520 (4) 7560 (5) 15120

1

【解説】

(1) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
 $= 5^2 - 2 \cdot 3 = 19,$
 $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$
 $= 5(19 - 3) + 3 \cdot (-3) = 71,$
 $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$
 $= 19^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)]$
 $= 361 - 2[3^2 - 2 \cdot (-3) \cdot 5] = 283$
(2) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(3 + 1) + 2\sqrt{3 \cdot 1}} = \sqrt{3} + 1$
よって (与式) $= \sqrt{9 + 4(\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{13 + 2\sqrt{12}}$
 $= \sqrt{(12 + 1) + 2\sqrt{12 \cdot 1}} = \sqrt{12} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$

2

【解説】

(1) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 9x^2y^2$
 $= (x^2 + y^2)^2 - (3xy)^2$
 $= \{(x^2 + y^2) + 3xy\}\{(x^2 + y^2) - 3xy\}$
 $= (x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$
(2) (与式) $= (x - 1)(x - 7) \times (x - 3)(x - 5) - 9$
 $= (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) - 9$
 $= (x^2 - 8x)^2 + 22(x^2 - 8x) + 96$
 $= (x^2 - 8x + 6)(x^2 - 8x + 16)$
 $= (x^2 - 8x + 6)(x - 4)^2$
(3) $a^3 + 6ab - 8b^3 + 1$
 $= a^3 - 8b^3 + 1 + 6ab = a^3 + (-2b)^3 + 1^3 - 3a \cdot (-2b) \cdot 1$
 $= \{a + (-2b) + 1\}\{a^2 + (-2b)^2 + 1^2 - a \cdot (-2b) - (-2b) \cdot 1 - 1 \cdot a\}$
 $= (a - 2b + 1)(a^2 + 4b^2 + 1 + 2ab + 2b - a)$
 $= (a - 2b + 1)(a^2 + 2ab + 4b^2 - a + 2b + 1)$

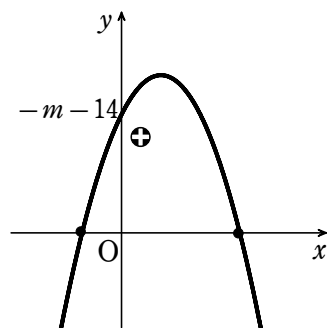
3

解説

$f(x) = -x^2 + (m-10)x - m - 14$ とし, $f(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (m-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-m-14) \\ &= m^2 - 24m + 44 \\ &= (m-2)(m-22) \end{aligned}$$

- (1) $y = f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから, x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは, $f(0) = -m - 14 > 0$ のときである。
したがって $m < -14$



- (2) $y = f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分とのみ共有点をもつのは, 次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

- [1] グラフと x 軸が共有点をもつから

$$\begin{aligned} D &= (m-2)(m-22) \geq 0 \\ \text{よって } m &\leq 2, 22 \leq m \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

- [2] グラフの軸は直線 $x = \frac{m-10}{2}$ で, この軸について

$$\frac{m-10}{2} < 0$$

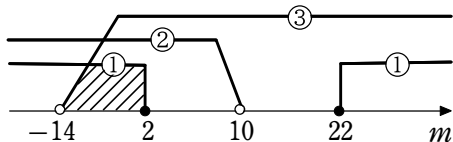
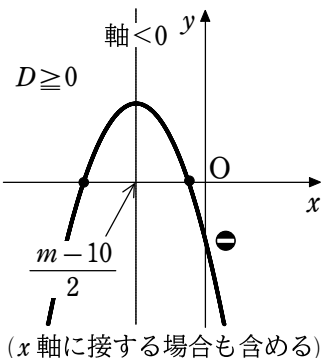
$$\text{よって } m < 10 \quad \dots\dots ②$$

- [3] $f(0) < 0$ であるから $-m - 14 < 0$

$$\text{よって } m > -14 \quad \dots\dots ③$$

- ①, ②, ③ の共通範囲を求めて

$$-14 < m \leq 2$$



- (3) $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $x > 1$ の部分と, 異なる 2 点で交わるのは, 次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

- [1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わるから

$$\begin{aligned} D &= (m-2)(m-22) > 0 \\ \text{よって } m &< 2, 22 < m \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

- [2] グラフの軸: 直線 $x = \frac{m-10}{2}$ について

$$\frac{m-10}{2} > 1 \quad \text{よって } m > 12 \quad \dots\dots ②$$

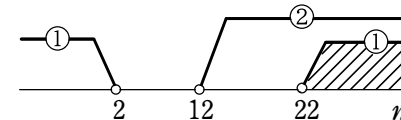
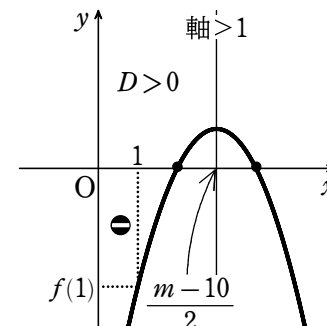
- [3] $f(1) < 0$ から

$$-1 + m - 10 - m - 14 = -25 < 0$$

これは常に成り立つ。

- ①, ② の共通範囲を求めて

$$m > 22$$



4

解説

- (1) $x^2 + (2-a)x - 2a \leq 0$ から $(x+2)(x-a) \leq 0 \quad \dots\dots ①$

- [1] $a < -2$ のとき, ① の解は $a \leq x \leq -2$

- [2] $a = -2$ のとき, ① は $(x+2)^2 \leq 0$ よって, 解は $x = -2$

- [3] $-2 < a$ のとき, ① の解は $-2 \leq x \leq a$

- (2) $ax^2 \leq ax$ から $ax(x-1) \leq 0 \quad \dots\dots ②$

- [1] $a > 0$ のとき, ② から $x(x-1) \leq 0$ よって, 解は $0 \leq x \leq 1$

- [2] $a = 0$ のとき, ② は $0 \cdot x(x-1) \leq 0$ これは x がどんな値でも成り立つ。

よって, 解は すべての実数

- [3] $a < 0$ のとき, ② から $x(x-1) \geq 0$ よって, 解は $x \leq 0, 1 \leq x$

- (3) $x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 > 0$ から $x^2 - 3ax + (a+1)(2a-1) > 0$

$$\text{よって } \{x - (a+1)\}\{x - (2a-1)\} > 0 \quad \dots\dots ③$$

- [1] $a+1 < 2a-1$ すなわち $a > 2$ のとき, ③ の解は

$$x < a+1, 2a-1 < x$$

- [2] $a+1 = 2a-1$ すなわち $a = 2$ のとき, ③ は $(x-3)^2 > 0$

よって、解は $x < 3, 3 < x$

[3] $a+1 > 2a-1$ すなわち $a < 2$ のとき、③の解は

$$x < 2a-1, a+1 < x$$

5

解説

(1) $\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos B \\ &= 10 - 6 \cos B \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\triangle ACD$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos(180^\circ - B) \\ &= 13 + 12 \cos B \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ② から $10 - 6 \cos B = 13 + 12 \cos B$

$$\text{ゆえに} \quad \cos B = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

(2) $\sin B > 0$ であるから、(1) より

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\text{また} \quad \sin D = \sin(180^\circ - B) = \sin B = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABC + \triangle ACD &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B + \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin D \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{3\sqrt{35}}{4} \end{aligned}$$

6

解説

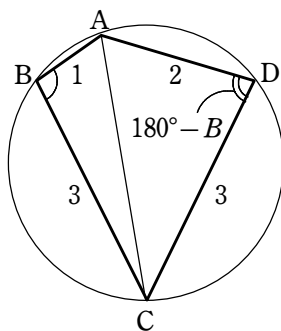
(1) $a < a+2 < a+4$ であるから、三角形の成立条件は

$$a+4 < a+(a+2)$$

$$\text{よって} \quad a > 2 \quad \dots\dots ①$$

このとき、鈍角三角形となるための条件は

$$a^2 + (a+2)^2 < (a+4)^2$$



$$\text{ゆえに} \quad a^2 - 4a - 12 < 0$$

$$\text{すなわち} \quad (a+2)(a-6) < 0$$

$$\text{よって} \quad -2 < a < 6 \quad \dots\dots ②$$

①, ② の共通範囲を求めて $2 < a < 6$

(2) 長さ $a+4$ の辺に対する角が 120° になるから、余弦定理により

$$(a+4)^2 = a^2 + (a+2)^2 - 2a(a+2)\cos 120^\circ$$

$$\text{ゆえに} \quad 2(a^2 - a - 6) = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (a+2)(a-3) = 0$$

(1) より、 $2 < a < 6$ であるから $a = 3$

外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\frac{a+4}{\sin 120^\circ} = 2R \quad \text{すなわち} \quad \frac{7}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\text{よって} \quad R = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

7

解説

$\sqrt{7}$ が無理数でないと仮定すると、1 以外に正の公約数をもたない自然数 a, b を用いて、

$$\sqrt{7} = \frac{a}{b} \quad \text{と表される。}$$

$$\text{このとき} \quad a = \sqrt{7}b \quad \text{両辺を 2 乗すると} \quad a^2 = 7b^2 \quad \dots\dots ①$$

よって、 a^2 は 7 の倍数であるから、 a も 7 の倍数である。

ゆえに、 c を自然数として、 $a = 7c$ と表される。

$$\text{この両辺を 2 乗すると} \quad a^2 = 49c^2 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ② から} \quad 7b^2 = 49c^2 \quad \text{すなわち} \quad b^2 = 7c^2$$

よって、 b^2 は 7 の倍数であるから、 b も 7 の倍数である。

ゆえに、 a と b は公約数 7 をもつ。

これは、 a と b が 1 以外に公約数をもたないことに矛盾する。

したがって、 $\sqrt{7}$ は無理数である。

8

(解説)

$b \neq 0$ と仮定する。

$$a + b\sqrt{2} = 0 \text{ から } \sqrt{2} = -\frac{a}{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

a, b は有理数であるから、 $\textcircled{1}$ の右辺は有理数である。

ところが $\textcircled{1}$ の左辺は無理数であるから、これは矛盾である。

したがって $b = 0$

$$a + b\sqrt{2} = 0 \text{ に } b = 0 \text{ を代入して } a = 0$$

すなわち、 a, b が有理数のとき $a + b\sqrt{2} = 0$ ならば $a = b = 0$ である。

9

(解説)

A, B, C, D を買う個数を、それぞれ a, b, c, d とすると、 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ であり、合わせて 10 個買うから

$$a + b + c + d = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) A, B, C, D の 4 種類から重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$${}_4H_{10} = {}_{4+10-1}C_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = 286 \text{ (通り)}$$

(2) $a-1=A, b-1=B, c-1=C, d-1=D$ とおくと

$$a = A+1, b = B+1, c = C+1, d = D+1$$

$\textcircled{1}$ に代入して $(A+1) + (B+1) + (C+1) + (D+1) = 10$

ゆえに $A+B+C+D=6, A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, D \geq 0$

求める買い方の総数は、A, B, C, D の 4 種類から重複を許して 6 個取る組合せの総数に等しい。

$$\text{よって } {}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84 \text{ (通り)}$$

(3) $a=3$ のとき、 $\textcircled{1}$ から $b+c+d=7$

$$b-1=B, c-1=C, d-1=D \text{ を代入して } (B+1) + (C+1) + (D+1) = 7$$

$$\text{よって } B+C+D=4, B \geq 0, C \geq 0, D \geq 0$$

$$\text{求める買い方の総数は、(2) と同様に考えて } {}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15 \text{ (通り)}$$

別解 (1) 10 個の ○ で商品を表し、3 つの | で仕切りを表す。

このとき、10 個の ○ と 3 つの | の順列の総数が求める場合の数となるから

$${}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = 286 \text{ (通り)}$$

(2) 10 個の ○ を並べる : ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

求める買い方の総数は、○ と ○ の間の 9 個の場所から仕切り | を入れる 3 個の場所を選ぶ方法の数と同じである。

$$\text{したがって } {}_9C_3 = 84 \text{ (通り)}$$

(3) 7 個の ○ を並べ、○ と ○ の間の 6 個の場所から仕切り | を入れる 2 個の場所を選ぶ方法の数と同じである。

$$\text{したがって } {}_6C_2 = 15 \text{ (通り)}$$

10

(解説)

$$(1) \frac{9!}{2!2!2!} = 45360 \text{ (通り)}$$

(2) 隣り合う AA をまとめて A' と考えると、求める並べ方は

$$\frac{8!}{2!2!} = 10080 \text{ (通り)}$$

(3) 隣り合う AA をまとめて A', TT をまとめて T' と考えると、求める並べ方は

$$\frac{7!}{2!} = 2520 \text{ (通り)}$$

(4) □ 3 個, A 2 個, T 2 個, H 2 個を 1 列に並べ、3 個の □ は左から順に M, C, R とすればよいから、求める並べ方は

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7560 \text{ (通り)}$$

(5) ○ 3 個, M 1 個, T 2 個, H 2 個, R 1 個を 1 列に並べ、3 個の ○ は左から順に A, C, A とすればよいから、求める並べ方は

$$\frac{9!}{3!2!2!} = 15120 \text{ (通り)}$$